Math. Modelle in den Wirtschaftswissenschaften
WS 2000/2001

Rucksackprobleme

Gegeben: n Gegenstände mit Gewichten a_i und Nutzwerten c_i, $1 \leq i \leq n$.
Eine obere Grenze A für das Gesamtgewicht.

Binäres Rucksackproblem

Frage: Welche Gegenstände sollten eingepackt werden, sodaß das Gesamtgewicht B nich überschritten wird und der Gesamtnutzen maximiert wird?

Entscheidungsvariablen: $x_i = \begin{cases} 1 & \text{Gegenst. } i \text{ wird eingepackt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

IP-Modell:

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \text{udNB} & \\ & \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq A \\ & x_i \in \{0,1\}, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

Ganzzahliges Rucksackproblem

Frage: Wieviele Exemplare pro Gegenständ sollten eingepackt werden, sodaß das Gesamtgewicht B nich überschritten wird und der Gesamtnutzen maximiert wird?

Entscheidungsvariablen: x_i – Anzahl der Exemplare von Gegenstand i die eingepackt werden.

IP-Modell:

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \text{udNB} & \\ & \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq A \\ & x_i \in \mathbf{Z}^+ \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

Math. Modelle in den Wirtschaftswissenschaften
WS 2000/2001

Das Multidimensionale Rucksackproblem

Zusätzlich gegeben:

Die Volumina b_i der Gegenstände und eine obere Grenze B für das Gesamtvolumen.

Gleiche Entscheidungsvariablen x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

IP-Modell:

$$\begin{array}{rr} \text{max} & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \text{udNB} & \\ & \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq A \\ & \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \leq B \\ & x_i \in \mathbf{Z}^+ \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

Das 0-1 Multidimensionale Rucksackproblem mit zusätzlichen "multiple choice" Restriktionen

Zusätzlich gegeben:

Eine Aufteilung der Gegenstände in p Teilmengen $\{1, 2, \ldots, n_1\}$, $\{n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n_1 + n_2\}$, ..., $\{n_1 + \ldots + n_{p-1} + 1, n_1 + \ldots + n_{p-1} + 2, \ldots, n_1 + \ldots + n_p\}$, wobei $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n$

Zusätzlich gesucht: daß pro Teilmenge genau ein Gegenstand eingepackt wird.

Zusätzliche Restriktionen:

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + \ldots + x_{n_1} = 1 \\ x_{n_1+1} + x_{n_1+2} + \ldots + x_{n_1+n_2} = 1 \\ \vdots \\ x_{n_1+n_2+\ldots+n_{p-1}+1} + x_{n_1+n_2+\ldots+n_{p-1}+2} + \ldots + x_{n_1+n_2+\ldots+n_{p-1}+n_p} = 1 \end{array}$$

Math. Modelle in den Wirtschaftswissenschaften
WS 2000/2001

Mengendeckung-Probleme (Set covering problems)

Ein Lieferung-und-Routing-Problem (A vehicle routing problem)

Gegeben: Ein Depot, mehrere LKW, und m Kunden, die beliefert werden sollten.
Transportkosten c_{ij} (Zeit oder Entfernung) für jedes Paar (i, j) wobei i, j – Depot oder Kundenstandort
Bedarf d_i für jeden Kunden i (in Tonen)
Kapazität a_k (in Tonen) für jedes LKW k
Eine obere Grenze für die täglich zurückgelegte Entfernung pro LKW

Gesucht: Eine Aufteilung der Kunden in Gruppen, sodaß jede Kundengruppe von einem LKW in einer Depot-Kunden-Depot Route beliefert wird und die Gesamtkosten minimiert werden.

Ein Lösungsweg:

1. Erzeuge eine Menge J von zulässigen "guten" Routen. Sei $n := |J|$. Seien c_j die Kosten der Route j.

Sei $a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{Route } j \text{ besucht Kunde } i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

2. Wähle eine kostenminimale Teilmenge $J' \subseteq J$ mit Hilfe deren Routen alle Kunden beliefert werden können.

Entscheidungsvariablen:
$x_j := \begin{cases} 1 & \text{Route } j \text{ wird implementiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, j = 1, 2, \ldots, n$

Modell:

$$\begin{array}{ll} \text{min} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{udNB} & \\ & \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n \\ & x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

Eine Anwendung: Flugpersonal-Scheduling-Probleme (airline crew scheduling)

Math. Modelle in den Wirtschaftswissenschaften
WS 2000/2001

Mengenpackung-Probleme (Set packing problems)

Input: $A \in \{0,1\}^{m\times n},\ e = \underbrace{(1,1,\ldots,1)}_{m}^{t},\ x, c \in \{0,1\}^n$

Das allgemeine Modell:

$$\begin{array}{ll} \max & c^t x \\ \text{udNB} & \\ & Ax \le e \\ & x \in \{0,1\}^n \end{array}$$

Beispiel: Ein Treffen-Scheduling Problem

Gegeben: n Treffen, die jeweils 1 Stunde dauern und in einer Woche einzuplanen sind.
T einstündige Zeitintervalle in denen Treffen stattfinden können.
k Treffenteilnehmer insgesamt.

Gesucht: Eine Zuordnung der möglichen Zeitintervalle zu den Treffen, sodaß soviele Treffen wie möglich konfliktfrei eingehalten werden können.

Sei $a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{Teilnehmer } i \text{ muß in Treffen } j \text{ teilnehmen} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
$\forall i = 1, 2, \ldots, k,\ \forall j = 1, 2, \ldots, n$

Entscheidungsvariablen:

$x_{jt} := \begin{cases} 1 & \text{Treffen } j \text{ findet im Zeitintervall t statt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
$\forall j = 1, 2, \ldots, n,\ \forall t = 1, 2, \ldots, T$

Modell:

$$\begin{array}{cll} \min & \sum_{j=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} x_{jt} & \\ \text{udNB} & & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{jt} \le 1 & \forall i = 1, 2, \ldots, n, & \forall t = 1, 2, \ldots, T \\ x_{jt} \in \{0,1\} & \forall j = 1, 2, \ldots, n, & \forall t = 1, 2, \ldots, T \end{array}$$

Math. Modelle in den Wirtschaftswissenschaften
WS 2000/2001

Partition-Probleme (Set partitioning problems)

Input: $A \in \{0,1\}^{m \times n}$, $e = \underbrace{(1,1,\ldots,1)^t}_{m}$, $x, c \in \{0,1\}^n$

Das allgemeine Modell:

$$\begin{array}{ll} \max & c^t x \\ \text{udNB} & \\ & Ax = e \\ & x \in \{0,1\}^n \end{array}$$

Beispiel: m Verkaufszonen müssen in Verkaufsgebieten organisiert werden, sodaß jedes Gebiet von einem Verkaufsbeauftragten betreut werden kann.

Ein Lösungsweg:

1. Generiere eine Liste von vielen (n) möglichen guten Verkaufsgebieten (jedes Gebiet besteht aus mehreren Verkaufszonen).
   Seien c_j die Kosten für das zusammenschließen der entsprechenden Verkaufszonen in Verkaugsgebiet j
   Sei $a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{Verkaufsgebiet } j \text{ schließt Zone } j \text{ ein} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
   $\forall i = 1,2,\ldots,m$, $\forall j = 1,2,\ldots,n$

2. Entscheide welche Verkaufsgebiete tatsächlich implementiert werden sollten

Entscheidungsvariablen:

$$x_j := \begin{cases} 1 & \text{Verkaufsgebiet } j \text{ wird implementiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \forall j = 1,2,\ldots,n$$

Modell:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{j=1}^n x_j \\ \text{udNB} & \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 1 \quad \forall i = 1,2,\ldots,m \\ & x_j \in \{0,1\} \quad \forall j = 1,2,\ldots,n \end{array}$$

Math. Modelle in den Wirtschaftswissenschaften
WS 2000/2001

Standortprobleme (Location problems)

Gegeben: n Kunden, die beliefert werden sollten.
d_i – Bedarf von Kunden i.
m Kandidatstandorte für Lagerhäuser.
f_j – Kosten für die Errichtung eines Lagerhauses in Standort j.
k_j – Kapazität des in Standort j errichteten Lagerhauses.
c_{ij} – Transportkosten vom Standort j zum Kunden i (pro Produkteinheit)

Gesucht: Die tatsächlichen Standorte der Lagerhäuser und ein Transportplan, sodaß der Bedarf aller Kunden erfüllt ist und die Gesamkosten (Errichtungs- und Transportkosten) minimiert werden.

Entscheidungsvariablen:

$$y_j := \begin{cases} 1 & \text{in Standort } j \text{ wird ein Lagerhaus errichtet} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\forall j = 1, 2, \ldots, m$

x_{ij} – Menge der Produkte die vom Lagerhaus j zum Kunden i geliefert werden

$\forall i = 1, 2, \ldots, n, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, m$

Modell:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{j=1}^{n} f_j y_j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \\ \text{udNB} & \\ & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le k_j y_j \quad \forall j = 1, 2, \ldots, m \\ & \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \ge d_i \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n \\ & y_j \in \{0, 1\} \quad \forall j = 1, 2, \ldots, m \\ & x_{ij} \ge 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n, \forall j = 1, 2, \ldots, m \end{array}$$

Math. Modelle in den Wirtschaftswissenschaften WS 2000/2001

Das Rundreiseproblem (The travelling salesman problem - TSP)

Ein Vortragender soll in n Städten Vorträge halten. In welcher Reihenfolge besucht er diese Städte hintereinander, ohne eine Stadt zweimal zu betreten, sodaß die zurückgelegte Gesamtentfernung minimal wird?

Gegeben: Die Distanzmatrix $D = (d_{ij})$,
d_{ij} – entfernung zwischen Stadt i und Stadt j.

Gesucht: Eine kostenminimale Tour (Rundreise) durch alle Städte, d.h. eine zyklische Permutation
$\phi = (1, i_1, i_2, \ldots, i_n, 1)$.

Tourlänge $d(\phi) = \sum_{i=1}^{n} d_{i\phi(i)}$

Sei $\mathcal{S}_n$ die Menge aller Permutationen von $1, 2, \ldots, n$

Modell: $$\min_{\phi \text{ zyklisch}, \phi \in \mathcal{S}_n} \sum_{i=1}^{n} d_{i\phi(i)}$$

D (a)symmetrisch $\Leftrightarrow$ (a)symmetrisches Rundreiseproblem

Untere Schranken für das TSP:

Der asymetrische Fall:

$$\min_{\phi \in \mathcal{S}_n} \sum_{i=1}^{n} d_{i\phi(i)} \leq \min_{\phi \text{ zyklisch}, \phi \in \mathcal{S}_n} \sum_{i=1}^{n} d_{i\phi(i)}$$

Der optimale Zielfunktionswert des linearen Zuordnungsproblems ist eine untere Schranke für den optimalen Zielfunktionswert des TSPs.

Math. Modelle in den Wirtschaftswissenschaften
WS 2000/2001

Das Rundreiseproblem (Fortsetzung)

Der symmetrische Fall: Das 1-Baum Problem

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, zweifach zusammenhängender Graph mit $V = \{1, 2, \dots, n\}$.

Ein 1-Baum in G ist ein spannender Baum im Untergraphen, der von $V \setminus \{1\}$ aufgespannt wird, zusammen mit zwei beliebigen Kanten, die mit dem Knoten 1 indizieren.

Jede Tour ist ein 1-Baum, unabhängig davon welcher Knoten im Graphen als ausgezeichneter Knoten "1" gewählt wird.

D.h. die optimale (minimale) Länge eines 1-Baumes ist eine untere Schranke für den optimalen Zielfunktionswert des TSPs.

Ein 1-Baum mit minimaler Gesamtlänge kann mit dem Greedy-Algorithmus bestimmt werden.

Math. Modelle in den Wirtschaftswissenschaften WS 2000/2001

Das quadratische Zuordnungsproblem (The quadratic assignment problem - QAP)

Gegeben: n Standorte und deren Distanzmatrix $A = (a_{ij})$;
a_{ij} - Entfernung zwischen Standort i und j.
n Einrichtungen, die in den n Standorten errichtet werden sollten, sowie ihre Flußmatrix $B = (b_{ij})$;
b_{ij} - Fluß der Materialien (Menschen, Information), der pro Zeiteinheit von Einrichtung i nach Einrichtung j fließt.

Gesucht: Eine Zuordnung der Einrichtungen zu den Standorten, sodaß die zurückgelegte Gesamtentfernung der Materialien (Menschen, Info) pro Zeiteinheit minimiert wird.

$\phi \in \mathcal{S}_n$ spezifiziert eine Zuordnung der Einrichtungen zu den Standorten.

$a_{\phi(i)\phi(j)} b_{ij}$ – die vom Fluß von i nach j zurückgelegte Entfernung

$\sum_{i,j=1}^{n} a_{\phi(i)\phi(j)} b_{i,j}$ – zurückgelegte Gesamtentfernung

Modell:
$$\min_{\phi \in \mathcal{S}_n} \sum_{i,j=1}^{n} a_{\phi(i)\phi(j)} b_{i,j}$$

Das TSP ist ein Spezialfall des QAPs:

$$\min_{\phi \text{ zyklisch}, \phi \in \mathcal{S}_n} \sum_{i=1}^{n} d_{i\phi(i)} = \min_{\phi \in \mathcal{S}_n} d_{\phi(i)\phi(j)} b_{ij}$$

$$\text{wobei } b_{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j) = (n,1) \text{ oder } i = 1, 2, \dots n-1 \text{ und } j = i+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Math. Modelle in den Wirtschaftswissenschaften
WS 2000/2001

Das quadratische Zuordnungsproblem
(Fortsetzung)

Alternatives Modell:

Entscheidungsvariablen:

$$x_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{Standort } i \text{ wird Einrichtung } j \text{ zugeordnet} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\forall i, j = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} x_{ij} \\ \text{udNB} & \\ & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n \\ & \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j = 1, 2, \ldots, n, \end{array}$$