Math. Modelle in den Wirtschaftswissenschaften
WS 2000/2001

Kapitel 4: Einige Modelle aus der kombinatorischen Optimierung

1. Das Transportproblem (TP), das Umladeproblem (UP) und das lineare Zuordnungsproblem (LZP)
   - Die Ungarische Methode für das LZP
2. Rucksackprobleme (0-1, ganzzahlig, multidimensional, mit "multiple choice" Restriktionen)
   - Ein dynamisches Programmierungsverfahren
   - Eine Greedy-Heuristik
3. Netzwerkprobleme (Planung und Kontrolle von Projekten mit PERT-CPM)
4. Deckung-, Packung- und Partitionierungprobleme
   - Lieferung- und Routingprobleme
   - Flugpersonal-Schedulingprobleme (airline crew scheduling)
5. Standortprobleme
6. Das Rundreisproblem (TSP)
7. Das Quadratische Zuordnungsproblem (QZP)

Math. Modelle in den Wirtschaftswissenschaften
WS 2000/2001

Das Transportproblem (TP) – Ein Einführungsbeispiel

	Transportkosten ($) pro LKW-Ladung				
	Lager				
	1	2	3	4	
Fabrik 1	464	513	654	867	75
Fabrik 2	352	416	690	791	125
Fabrik 3	995	682	388	685	100
Zuteilung	80	65	70	85	

Entscheidungsvariablen: x_{ij} – Anzahl der LKW-Ladungen die vom Fabrik i zum Lager j transportiert werden

Z – Transportkosten (gesamt)

IP-Modell:

$$\begin{aligned}\min \quad Z = \quad & 464x_{11} + 513x_{12} + 654x_{13} + 867x_{14} + 352x_{21} + \\ & 416x_{22} + 690x_{23} + 791x_{24} + 995x_{31} + 682x_{32} + \\ & 388x_{33} + 685x_{34}\end{aligned}$$

udNB

$$\begin{array}{llllllllllllll}
x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} & & & & & & & & & & & & & = 75 \\
 & & & & x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} & & & & & & & & & = 125 \\
 & & & & & & & & x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} & & & & & = 100 \\
x_{11}+ & & & & x_{21}+ & & & & x_{31} & & & & & = 80 \\
 & x_{12}+ & & & & x_{22}+ & & & & x_{32} & & & & = 65 \\
 & & x_{13}+ & & & & x_{23}+ & & & & x_{33} & & & = 70 \\
 & & & x_{14}+ & & & & x_{24}+ & & & & x_{34} & & = 85
\end{array}$$

$$x_{ij} \in \mathbf{Z}^+, \quad i = 1,2,3; j = 1,2,3,4$$

Die Struktur der Koeffizientematrix eines TP:

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Math. Modelle in den Wirtschaftswissenschaften WS 2000/2001

Das Transportproblem - Formulierung als minimales Kostenflußproblem (MKFP) und und totale Unimodularität

Satz: (Motzkin [1956], Hoffman und Kruskal [1956], Hoffman und Kuhn [1956], Heller und Tompkins [1956])

Eine Matrix A alle deren Einträge aus $\{0, 1\}$ sind, ist total unimodular dann und nur dann wenn ihre Zeilen in zwei nichtleere Klassen geteilt werden können, sodaß jede Spalte einen 1-Eintrag pro Klasse enthält.

Äquivalente Formulierung:
Sei $G = (V, E)$ ein ungewichteter Graph und A die Knoten-Kanten-Inzidenz Matrix ($a_{ij} = 1$ falls $(i, j) \in E$ und $a_{ij} = 0$ sonst). A ist total unimodular dann und nur dann wenn G bipartit ist.

Lösungswege:

- Löse die LP-Relaxation mit einem verkürzten Simplexverfahren

- Formuliere TP als minimales Kostenflußproblem (MKFP) und löse dies mit Hilfe von MKFP-Algorithmen.

Math. Modelle in den Wirtschaftswissenschaften
WS 2000/2001

Das Umladeproblem - Ein Beispiel

Annahme: Der Distributionsweg der Güter ist nicht von vorneherein klar; es besteht die Möglichkeit zu Umladungen.

Z.B. ein direkter Transport von i nach j kann teuerer als ein Transport von i nach k und dann von k nach j sein.

Erweiterung des Transportproblems um die Routenentscheidung $\rightarrow$ Umladeproblem.

Erweiterung des Einführungsbeispiels: Es werden Umladungen bei den auf der Strecke liegenden Fabriken und Lagerhäusern vorgenommen. Zusätzlich stehen 5
weitere Zwischenlager als Umladeorte zur Verfügung.

Das Umlade Problem wird als TP formuliert.

Grundidee: die einzelnen LKW-Fahrten werden als Transporte von einem Lieferort zu einem Verbrauchsort interpretiert.
Alle Orte (Fabriken, Zwischenlager, Lager) werden gleichzeitig als mögliche Verbrauchsorte sowie auch Lieferorte der Transportmengen gesehen.

Zum Bedarf bzw. Vorrat jedes Ortes wird eine obere Schranke für die Anzahl der Umladungen addiert.

In die Vorrats und Bedarfsrestriktionen werden Schlupfvariablen eingeführt, die die nicht durchgeführten Überschußtransporte aufnehmen.
Für Ort i sei x_{ii} die Schlupfvariable.
Die Entsprechenden Transportkosten sind $c_{ii} = 0$.

Math. Modelle in den Wirtschaftswissenschaften
WS 2000/2001

Ein Spezialfall von TP – Das lineare Zuordnungsproblem (LZP)

Gegeben: n Jobs müssen n Arbeitern zugeteilt werden, 1 Job je Arbeiter
c_{ij} - anfallende Kosten wenn Job i vom Arbeiter j durchgeführt wird.

Gesucht: Eine Zuordnung der Jobs zu den Arbeitern, die die Gesamtkosten für die Durchführung aller Jobs minimiert.

Modell:

$$\begin{array}{ll} \text{min} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} \\ \text{udNB} & \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1,2,\ldots,n \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall i = 1,2,\ldots,n \\ & x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i,j = 1,2,\ldots,n \end{array}$$

Def: Eine 0-1 Matrix $X = (x_{ij})$ die genau eine 1 pro Zeile und genau eine 1 pro Spalte enthält heißt *Permutationsmatrix*.

$X = (x_{ij})$ ist eine Permutationsmatrix dann und nur dann wenn sie die Restriktionen des obigen LZP-Modells erfüllt.

Jede $n \times n$ Permutationsmatrix $X = (x_{ij})$ entspricht einer Permutation ϕ_X von $1,2,\ldots,n$:

$$x_{ij} = 1 \Longleftrightarrow \phi_X(i) = j$$

und umgekehrt, jede Permutation läßt sich durch eine Permutationsmatrix darstellen.

$\mathcal{S}_n$ – Menge der Permutationen von $1,2,\ldots,n$.

Ein alternatives Modell für das LZP: $\displaystyle\min_{\phi\in\mathcal{S}_n} \sum_{i=1}^n c_{i\phi(i)}$