Math. Modelle in den Wirtschaftswissenschaften
WS 2000/2001

Linear-ganzzahlige Programmierung (IP) – Ein Einführungsbeispiel (Beispiel 5)

Einem Unternehmen stehen 4 Investitionsalternativen zur Wahl.

Alternative	Investitionshöhe ($)	Ertrag ($)
1	16000	5000
2	22000	7000
3	12000	4000
4	8000	3000

Investitionsbüdget: $ 14000

Frage: Welche Investitionsalternativen soll das Unternehmen wahrnehmen, um einen maximalen Gewinn zu erzielen?

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{Alternative } i \text{ wird wahrgenommen} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$Z = 1000(16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 4x_4)$ – daraus resultierender Gewinn

Kapaz.restriktionen: $1000(5x_1 + 2x - 2 + 4x_3 + 3x_4) \leq 14000$

IP-Formulierung:

$$\max\ 1000(16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 4x_4)$$

$$1000(5x_1 + 2x - 2 + 4x_3 + 3x_4) \leq 14000$$

$$x_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Math. Modelle in den Wirtschaftswissenschaften
WS 2000/2001

Beispiel 5 – Fortsetzung

Optimale Lösung: $x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = x_4 = 1$ mit $Z = 42000$.

Das Unternehmen inverstitiert nicht in Alternative 1 obwohl diese Investition den größten Ertrag pro investierten Dollar bringen würde!

$$\left(\frac{16000}{5000} > \frac{22000}{7000} > \frac{12000}{4000} > \frac{8000}{3000}\right)$$

Grund?

IP-Probleme sind i.a. nicht effizient lösbar.

Lineare Relaxation:

$$\max\ 1000(16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 4x_4)$$
$$1000(5x_1 + 2x - 2 + 4x_3 + 3x_4) \leq 14000$$
$$0 \leq x_i \leq 1 \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Optimale Lösung der linearen Relaxation:

$x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 0.5$, $x_4 = 0$ mit $Z = 44000$

Weiters sollten folgende Restrikt. berücksichtigt werden:

1. Das Unternehmen darf höchstens 2 Invest.altern. wahrnehmen.
2. Falls das Unternehmen in 2 investiert, dann muß es auch in 1 investieren?
3. Falls das Unternehmen in 2 investiert, dann dardf es nicht in 4 investieren?

Math. Modelle in den Wirtschaftswissenschaften
WS 2000/2001

Einige Modellierungsmöglichkeiten mit binären Variablen

- **Entweder-oder Nebenbedingungen**

  Von zwei gegebenen Restriktionen muß nur eine eingehalten werden, z.B.

  entweder $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ oder $x_1 + 4x_2 \leq 16$

Sei M eine sehr große Zahl (zB. größte Maschinen Zahl)

$$\text{entweder} \left\{ \begin{array}{rr} & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ \text{und} & x_1 + 4x_2 \leq 16 + M \end{array} \right. \quad \text{oder}$$

$$\left\{ \begin{array}{rr} & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 + M \\ \text{und} & x_1 + 4x_2 \leq 16 \end{array} \right.$$

Diese Formulierung is äquivalent zu

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 & \leq & 18 + yM \\ x_1 + 4x_2 & \leq & 16 + (1-y)M \end{array} \right. \qquad y \in \{0,1\}$$

- **Wenn-dann Nebenbedingungen**

Modelliere $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0 \Longrightarrow g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -g(x_1, x_2, \ldots, x_n) & \leq & My \\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) & \leq & M(1-y) \end{array} \right. \qquad y \in \{0,1\}$$

Beispiel: $x_1 > 0 \Longrightarrow x_2 = x_3 = x_4 = 0$ $(x_i \geq 0, \forall i)$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_2 + x_3 + x_4 & \leq & My \\ x_1 & \leq & M(1-y) \end{array} \right. \qquad y \in \{0,1\}$$

Math. Modelle in den Wirtschaftswissenschaften
WS 2000/2001

Einige Modellierungsmöglichkeiten mit binären Variablen

- **k von m Restriktionen müßen halten**

$$\begin{array}{rcl} f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) & \leq & d_1 \\ f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) & \leq & d_2 \\ & \vdots & \\ f_m(x_1,x_2,\ldots,x_n) & \leq & d_m \end{array} \quad \text{und } k \text{ davon müßen halten}$$

ist äquivalent zu

$$\begin{array}{rcl} f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) & \leq & d_1 + My_1 \\ f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) & \leq & d_2 + My_2 \\ & \vdots & \\ f_m(x_1,x_2,\ldots,x_n) & \leq & d_m + My_m \qquad \text{und } y_i \in \{0,1\} \text{ für alle } i \\ \sum_{i=1}^{m} y_i & = & m-k \end{array}$$

- **Funktionen mit n möglichen Werten**

$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ darf einen von m gegebenen Werten $d_1,d_2,\ldots,d_m$ annehmen

kann folgendermaßen modelliert werden:

$$\begin{array}{rcl} f(x_1,x_2,\ldots,x_n) & = & \sum_{i=1}^{m} y_i d_i \\ & \sum_{i=1}^{m} y_i = 1 & \\ & y_i \in \{0,1\} \quad \text{für} \quad i=1,2,\ldots,m & \end{array}$$

Math. Modelle in den Wirtschaftswissenschaften
WS 2000/2001

Einige Modellierungsmöglichkeiten mit binären Variablen

- **Fixed-charge Probleme**

Betrachte n Aktivitäten $1, 2, \ldots, n$ mit Kosten $f_1, f_2, \ldots, f_n$
Kosten für die Durchführung von Aktivität j auf Niveau x_j

$$f_j(x_j) = \begin{cases} k_j + c_j x_j & \text{falls } x_j > 0 \\ 0 & \text{falls } x_j = 0 \end{cases}$$

k_j – konstante Kosten,
c_j – Kosten pro Niveaueinheits von Aktivität j

$$\begin{array}{rl} \min & Z = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \ldots f_n(x_n) \\ \text{unter Einhaltung} & \\ & \text{der gegebenen Nebenbedingungen} \\ & \text{eines linearen Programms} \end{array}$$

Hilfsvariablen $y_j = \begin{cases} 1 & \text{falls } j \text{ durchgeführt wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Dann gilt $f_j(x_j) = k_j y_j + c_j x_j$ für alle j

$$\begin{array}{rl} \min & Z = \sum_{j=1}^{n} (c_j x_j + k_j y_j) \\ \text{unter Einhaltung} & \\ & \text{der ursprünglichen Nebenbeding., zuzüglich} \\ & x_j \leq M y_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n \\ & y_i \in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

Math. Modelle in den Wirtschaftswissenschaften
WS 2000/2001

Modellierungsmöglichkeiten mit binären Variablen

- **Modellierung von stückweise linearen Funktionen**

  Rohölpreis pro Faß hängt von der Einkaufsmenge ab

  $f(x)$ - Kosten von x Fässer Rohöl

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 25x & 0 < x \leq 500 \\ 25 \cdot 500 + 20(x - 500) & 500 < x \leq 1000 \\ 25 \cdot 500 + 20 \cdot 500 + 15(x - 1000) & 1000 < x \leq 1500 \\ 25 \cdot 500 + 20 \cdot 500 + 15 \cdot 500 + 10(x - 1500) & x > 1500 \end{cases}$$

Knickstellen: 0, 500, 1000, 1500.

Sei $f(x)$ stückweise linear mit Knickstellen b_1, b_2, ..., b_n.

Für $b_k \leq x \leq b_{k+1}$, $k =, 1, 2, \ldots, n-1$, $\exists z_k \in [0, 1]$, sodaß

$x = z_k b_k + (1 - z_k) b_{k+1}$ und $f(x) = z_k f(b_k) + z_{k+1} f(b_{k+1})$

(a) Ersetze $f(x)$ durch $z_1 f(b_1) + z_2 f(b_2) + \ldots + z_n f(b_n)$

(b) Füge folgende zusätzliche Restriktionen ein:

$$x = z_1 b_1 + z_2 b_2 + \ldots z_n b_n$$
$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n = 1$$
$$y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} = 1$$
$$z_1 \leq y_1,\ z_2 \leq y_1 + y_2,\ z_2 \leq y_2 + y_3,\ \ldots,$$
$$z_{n-1} \leq y_{n-2} + y_{n-1},\ z_n \leq y_{n-1} + y_n$$
$$y_i \in \{0, 1\}\,(i = 1, 2, \ldots, n-1), \quad z_i \geq 0\,(i = 1, 2, \ldots, n)$$

Math. Modelle in den Wirtschaftswissenschaften
WS 2000/2001

Set-Covering Probleme

Großstadt mit 6 Bezirke. In welchen Bezirken sollten Feuerwehrstationen (FWS) eingerichtet werden, sodaß jeder Bezirk von mindestens 1 FWS in 15 Min. erreichbar ist? Es sollten so wenig wie möglich Feuerwerkstationen errichtet werden.

Abstandsmatrix (in Min)

nach	nach Stadt 1	Stadt 2	Stadt 3	Stadt 4	Stadt 5	Stadt 6
Stadt 1	0	10	20	30	30	20
Stadt 2	10	0	25	35	20	10
Stadt 3	20	25	0	15	30	20
Stadt 4	30	35	15	0	15	25
Stadt 5	30	20	30	15	0	14
Stadt 6	20	10	20	25	14	0

Städte, die aus Stadt i in 15 Min. erreicht werden können:

aus Stadt	1	2	3	4	5	6
erreichbare Städte	1,2	1,2,6	3,4	3,4,5	4,5,6	2,5,6

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{in Stadt } i \text{ wird ein FWS errichtet} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Effizienmaß: $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$

Restriktionen:

Stadt 1 sollte in 15 Min. erreichbar sein: $x_1 + x_2 \geq 1$
Stadt 2 sollte in 15 Min. erreichbar sein: $x_1 + x_2 + x_6 \geq 1$
u.s.w.

Math. Modelle in den Wirtschaftswissenschaften
WS 2000/2001

Linear-ganzzahlige Optimierungsprogramme mit total unimodulare Kostenmatrizen

$A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ – ganzzahlige $m \times n$-Matrix (alle Einträge sind ganzzahlig)
$b \in \mathbb{Z}^m$ – ganzzahliger m-dimensionaler Vektor
$c \in \mathbb{R}^n$ – reeller n-dimensionaler Vektor

$$\text{IP:} \qquad \begin{array}{ll} \min & Z = cx \\ \text{udNB} & \\ & Ax = b \\ & x \in \mathbb{Z}^n_+ \end{array}$$

Das relaxierte Problem oder die lineare Relaxation von IP:

$$\text{L:} \qquad \begin{array}{ll} \min & Z = cx \\ \text{udNB} & \\ & Ax = b \\ & x \in \mathbb{R}^n_+ \end{array}$$

Frage: Unter welchen Bedingungen sind die zulässigen Basis-Lösungen von L ganzzahlig?

Definition: Eine quadratische ganzzahlige Matrix B heißt *unimodular*, wenn $\det B = 1$ oder $\det B = -1$.

Eine ganzzahlige Matrix A heißt *total unimodular*, wenn jede quadratische nichtsinguläre Teilmatrix von A unimodular ist.

Satz 2.1 Sind in dem linearen Programm L die Matrix A total unimodular und der Vektor b ganzzahlig, dann sind alle Basislösungen von L ganzzahlig.