Mathematische Modelle in den Wirtschaftswissenschaften WS 2000/2001

4. Hausübung – Abzugeben bis Montag 20.11.2000

Ein System bestehe aus zwei parallel geschalteten Komponenten. Dieses System ist betriebsfähig, solange eine der beiden Komponenten arbeitet. Die Ausfallswahrscheinlichkeit betrage q für jede Komponente; ein Ausfall trete immer nur zum Ende einer Periode auf. Es wird angenommen, daß die Ausfälle der zwei Komponenten unabhängig voneinander sind. Für Störfälle steht ein Servicemann bereit, der genau zwei Perioden für die Behebung eines Ausfalls benötigt. Der Servicemann kann nur eine Komponente aufeinmal reparieren. Sei $X_t = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)}) \in \mathbb{R}^2$ der folgendermaßen definierte Zustandsvektor: $X_t^{(1)}$ bezeichnet die Anzahl der Komponenten, die am Ende der Periode t arbeiten; $X_2^{(t)} \in \{0, 1\}$ hat den Wert 1, wenn nur noch eine Periode für die Reparatur einer Komponente benötigt wird, und den Wert 0 sonst. Sei $X_0 = (2, 0)$ der Anfangszustand. Modellieren Sie den Systemverlauf mit Hilfe einer Markov-Kette (X_t), $t = \mathbb{N}$.

(a) Ermitteln Sie die Menge der möglichen Zustände des Systems und die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten. Konstruieren Sie den Übergangsgraphen.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt am Ende der laufenden Periode eine Warteschlange der Länge 1 (eine Komponente wartet noch auf den Beginn ihrer Entstörung) auf?

(c) Zeigen Sie, daß (X_t), $t \in \mathbb{N}$, eine ergodische Markov-Kette ist.

(d) Wie lauten die Gleichgewichtswahrscheinlichkeiten?

(e) Wie hoch sind die langfristig erwarteten Durchschnittskosten je Periode, wenn ein Systemstillstand (beide Komponenten ausgefallen) je Periode 30000 \$ kostet?