Graphentheoretische Algorithmen SS 2002

4. Übungsblatt

28. **Ein pathologisches Beispiel für den Labeling-Algorithmus.**
    (a) Sei G das Netzwerk aus Abbildung 2a mit Kanten a, b, c und d und Kantenkapazitäten 1, ∞, $\sqrt{2}$ bzw. ∞. Zeigen Sie, daß es für dieses Netzwerk eine unendliche Folge von augmentierenden (nicht Knoten-einfachen) Wegen P_n mit Kapazitäten c_n gibt, sodaß $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \nu$ gilt, wobei ν der Wert eines maximalen Flußes in G ist.
    (b) Sei G das Netzwerk aus Abbildung 2b mit Kanten a, b, c, d und e und Kantenkapazitäten 1, ∞, $\sqrt{2}$, ∞ bzw. 1. Zeigen Sie, daß es für dieses Netzwerk eine unendliche Folge von augmentierenden (nicht Knoten-einfachen) Wegen P_n mit Kapazitäten c_n gibt, sodaß $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \neq \nu$ gilt, wobei ν der Wert eines maximalen Flusses in G ist.
    (c) Sei G das Netzwerk aus Abbildung 2c. Zusätzlich zu den gezeichneten Kanten, gibt es Kanten mit unendlicher Kapazität zwischen je 2 Knoten aus $\{1, 2, 3, 4\}$ und zwischen je zwei Knoten aus $\{1', 2', 3', 4'\}$. Zeigen Sie, daß jeder augmentierende Weg aus (b) einem augmentierenden Weg in G entspricht. Somit führt der Markierungslgorithmus in diesem Fall unendlich viele Augmentierungen aus und der Flußwert konvergiert nicht gegen den optimalen Wert.

29. Verwenden Sie den Labeling-Algorithmus, um einen maximalen Fluß in dem ungerichteten Graphen aus Abbildung 1 zu bestimmen. Beachten Sie, daß der Fluß enlang einer ungerichteten Kante in beiden Richtungen fliessen kann und die Kapazität einer ungerichteten Kante für beide Flußrichtungen gilt. Zeichnen Sie nach jedem Augmentierungsschritt das Inkrementnetzwerk und spezifizieren Sie den nach der Terminierung des Algorithmus erzeugten minimalen Schnitt.

30. Angenommen, es liegt eine optimale Lösung des maximalen Flußproblems (MFP) in einem gerichteten Netzwerk $G = (V, E, c_{ij})$ mit ganzzahligen Kantenkapazitäten vor.
    (a) Es wird festgestellt, daß die Kapazität einer Kante (i, j) um k Einheiten unterschätzt wurde. Zeigen Sie, daß das MFP im aktualisierten Netzwerk mit Hilfe des Markierungsalgorithmus in $O(mk)$ Zeit gelöst werden kann.
    (b) Angenommen die Kapazität einer Kante (i, j) wurde um k Einheiten überschätzt. Wie würden Sie das MFP in dem aktualisierten Netwerk in $O(mk)$ Zeit lösen?

31. **Sicherheit von statistischen Daten.** (Kelly, Golden, Assad [1990], Gusfield [1988].)
    Das amerikanische Volkszählungsamt (U.S. Census Bureau) veröffentlicht Tabellen mit Daten aus den Volkszählungen. Sei $D = (d_{ij})$ mit $d_{ij} \geq 0$ für alle $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$, eine $p \times q$ Tabelle. Bezeichne $r(i)$ bzw. $c(j)$ die Summe der Einträge in der i-ten Zeile bzw. in der j-ten Spalte. Es wird angenommen, daß $r_i > 0$ für alle $1 \leq i \leq p$ und $c_j > 0$ für alle $1 \leq j \leq q$ gilt. Das Census Bureau gibt die Summen $r(i)$, $1 \leq i \leq p$, und $c(j)$, $1 \leq j \leq q$, und auch einige Einträge der Matrix D bekannt, möchte aber dennoch der Vertraulichkeit wegen einige Einträge für sich behalten. Sei Y die Menge der bekanntgegebenen Einträge. Gegebenenfalls könnte der Wert eines nicht bekanntgegebenen Eintrages mit Hilfe der Summenwerte und der bekanntgegebenen Einträge ermittelt werden. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn nur ein einziger Wert des nicht bekanntgegebenen Eintrages mit den bekanntgegebenen Einträgen und Summenwerten konsistent ist. So ein Eintrag, dessen Wert ermittelt werden kann, heißt *ungeschützt*. Entwicklen Sie einen polynomialen Algorithmus um alle ungeschützten Einträge in D zu identifizieren.

32. **Das Engpaß-Transportproblem (ETP).** (Ahuja 1986.)
    Das Transportproblem ist ein Spezialfall des minimalen Kostenflußproblems in $G = (V, E, u_{ij}, c_{ij})$ bei dem die Knotenmenge V in zwei Teilmengen V_1 und V_2 partitioniert werden kann ($V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$), sodaß alle $v \in V_1$ Vorratsknoten und alle $v \in V_2$ Bedarfsknoten sind. Weiters gilt $E = \{(i, j) : i \in V_1 \text{ und } j \in V_2\}$ und $u_{ij} := \infty$ für alle $(i, j) \in E$. Bei ETP wird ein ganzzahliger zulässiger Fluß $x = (x_{ij})_{(i,j) \in E}$ gesucht, der die Zielfunktion $\max\{c_{ij} x_{ij} : (i, j) \in E\}$ minimiert.

(a) Betrachten Sie folgende relaxierte Version des ETP. Sei $\lambda > 0$ ein Parameter. Gibt es einen zulässigen Fluß x in G, der die Ungleichung $\max\{c_{ij}x_{ij}\colon (i,j) \in E\} \leq \lambda$ erfüllt? Wie würden Sie dieses Problem lösen?

(b) Verwenden Sie das relaxierte Problem aus (a), um einen polynomialen Algorithmus für das ETP zu entwicklen. Welche Laufzeit hat Ihrer Algorithmus?

33. Angenommen in einem maximalen Flußproblem gibt es zusätzlich zu den Kantenkapazitäten auch Knotenkapazitäten. Die Kapazität eines Knoten ist eine obere Schranke für den Wert des Flusses, der in diesen Knoten hineinfließen kann. Gesucht wird ein maximaler Fluß, der die Flußerhaltungsbedingungen und die Kapazitätbedingungen bzgl. Knoten und Kanten erfüllt. Transformieren Sie dieses Problem auf das maximale Flußproblem. Wie ist die Komplexität dieses Problems im Vergleich zur Komplexität des klassischen maximalen Flußprobnlems aus theoretischer Sicht?

34. Bestimmen Sie in den Netzwerken aus den Abbildungen 3a und 3b jeweils einen maximalen Fluß von der Quelle zur Senke und einen minimalen Schnitt. Verwenden Sie dazu ein Verfahren Ihrer Wahl.

35. Bestimmen Sie in den Netzwerken aus Abbildung 4a bzw. 4b unter Verwendung einer in der Vorlesung behandelten Methode einen maximalen Fluß von der Quelle zur Senke mit minimalen Kosten.

36. Überprüfen Sie, ob der in Abbildung 5 gegebene Fluß von s nach t ein maximaler Fluß ist und gegebenenfalls ob es sich um einen maximalen Fluß mit minimalen Kosten handelt.

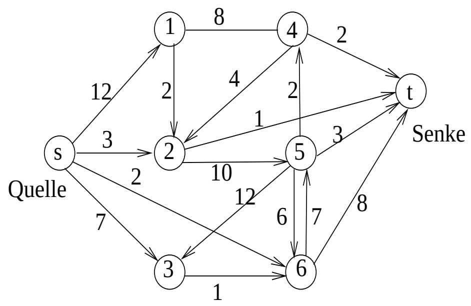

Abbildung 3a

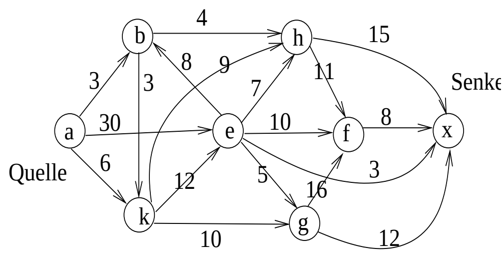

Abbildung 3b

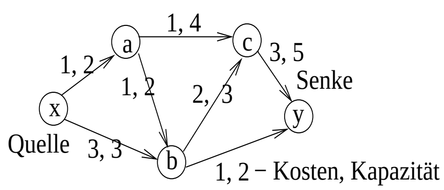

Abbildung 4a

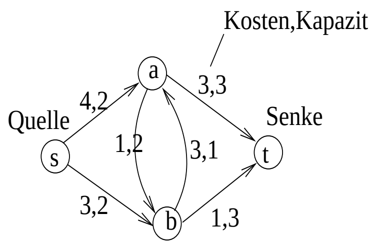

Abbildung 4b

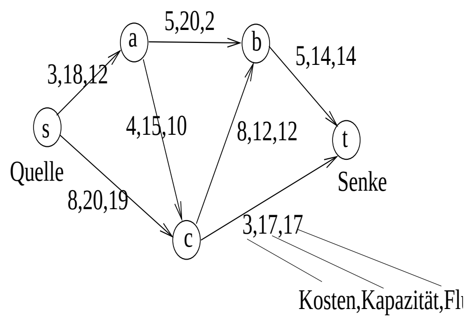

Abbildung 5

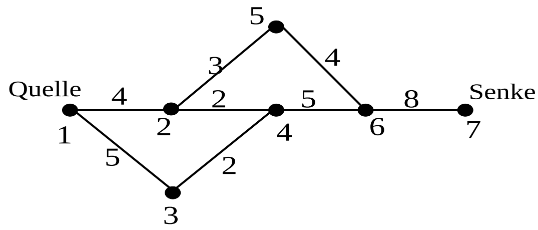

Abbildung 1

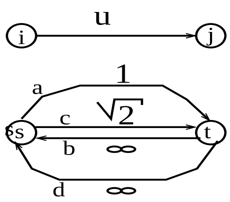

Abbildung 2a

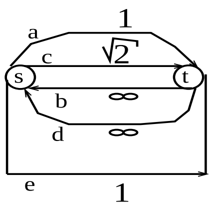

Abbildung 2b

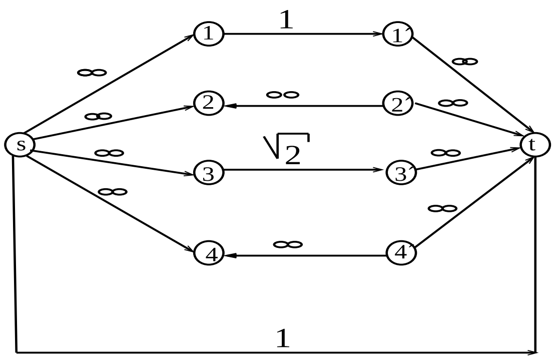

Abbildung 2c