Graphentheoretische Algorithmen SS 2002

3. Übungsblatt

21. (a) Bestimmen Sie im Graphen aus Abbildung 1 einen kürzesten Weg vom Startknoten 1 zum Knoten i für alle Knoten $i \neq 1$. Geben Sie einen kürzesten Wegebaum an. Sind im vorliegenden Beispiel die kürzesten Wege bzw. der kürzeste Wegebaum eindeutig?

    (b) Berechnen Sie für den Graphen aus Abbildung 2 einen kürzesten Weg von 1 nach i für alle Knoten $i \neq 1$, falls ein solcher existiert.

    c) Bestimmen Sie in den Graphen aus Abbildung 5a und 5b durch Anwendung der Ihnen bekannten Algorithmen einen kürzesten Weg von i nach j für alle Paare i, j von Knoten, falls ein solcher existiert.

22. Konstruieren Sie einen gerichteten gewichteten Graphen $G = (V, E, w)$ mit einigen negativen Kantengewichten $w_e \in \mathbb{R}$, $e \in E$, aber ohne negativen Kreise, sodaß für eine Quelle $s \in V$ folgendes gilt:

    (a) Der in der Vorlesung beschriebene Dijkstra Algorithmus liefert für alle $t \in V \setminus \{s\}$ einen kürzesten (s, t)-Weg in G.

    (b) Es gibt einen Knoten $t \in V \setminus \{s\}$, sodaß der in der Vorlesung beschriebene Dijkstra Algorithmus keinen kürzesten (s, t)-Weg in G liefert. D.h. der Dijkstra Algorithmus kann das Problem der kürzesten Wege aus s in G nicht korrekt lösen.

23. Zeigen Sie mit Hilfe eines Beispiels, daß ein gerichteter minimaler spannender Baum mit Wurzel s in einem gerichteten gewichteten Graphen $G = (V, E, w)$ nicht unbedingt ein Baum der kürzesten Wege mit Startknoten s ist. Umgekehrt, zeigen Sie, daß ein Baum der kürzesten Wege mit Startknoten s in G nicht immer ein gerichteter minimaler spannender Baum mit Wurzel s in G ist.

24. Es soll ein Schwertranport von Ort A nach Ort K erfolgen. Abbildung 3 gibt einen Überblick über das vorliegende Straßennetz, wobei das Gewicht einer Kante angibt, wieviel Tonnen Belastung die zugehörige Straße aushält. Ermitteln Sie das zulässige Höchstgewicht des Schwertransportes.

25. Sei $G = (V, E, w)$ ein gerichteter gewichteter Graph mit Kantengewichten $w_e \in E$ und s eine Quelle in G. Entscheiden Sie welche der folgenden Aussagen falsch und welche richtig sind. Beweisen Sie die richtigen Aussagen und widerlegen Sie die falschen mit Hilfe von Gegenbeispielen.

    (a) Wenn die Kantengewichte c_e paarweise verschieden sind ($\forall e_1, e_2 \in E \quad e_1 \neq e_2 \Rightarrow w_{e_1} \neq w_{e_2}$), ist der kürzeste Wegebaum eindeutig.

    (b) Sei $k \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und sei $\tilde{w}_e = w_e + k$, für alle $e \in E$. Dann gilt: Für je zwei Knoten $s, t \in V$ ist die Differenz $\tilde{L}_{s,t} - L_{s,t}$ ein Vielfaches von k, wobei $\tilde{L}_{s,t}$ bzw. $L_{s,t}$ die Länge eines kürzesten (s, t)-Weges in $\tilde{G} = (V, E, \tilde{w})$ bzw. in $G = (V, E, w)$ bezeichnet.

    (c) Sei $k \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und sei $\tilde{w}_e = w_e - k$, für alle $e \in E$. Dann gilt: Für je zwei Knoten $s, t \in V$ ist die Differenz $L_{s,t} - \tilde{L}_{s,t}$ ein Vielfaches von k, wobei $\tilde{L}_{s,t}$ bzw. $L_{s,t}$ die Länge eines kürzesten (s, t)-Weges in $\tilde{G} = (V, E, \tilde{w})$ bzw. in $G = (V, E, w)$ in bezeichnet.

    (d) Der in der Vorlesung beschriebene Dijkstra Algorithmus findet für jeden Knoten $t \in V \setminus \{s\}$ einen kürzesten (s, t)-Weg mit minimaler Anzahl von Kanten in G.

26. **Die unerläßlichste Kante.** Gegeben sei ein gewichteter gerichteter Graph $G = (V, E, w)$ mit nichtnegativen Kantengewichten w_e, $e \in E$, sowie eine Quelle $s \in V$ und eine Senke $t \in V$. Eine Kante $e \in G$ wird unerläßlich gennant, wenn die Länge eines kürzesten (s, t)-Weges in $G \setminus \{e\}$ größer als die Länge eines kürzesten (s, t)-Weges in G ist. Eine unerläßlichste Kante in G ist eine unerläßliche Kante e, sodaß die Differenz zwischen der Länge eines kürzesten (s, t)-Weges in $G \setminus \{e\}$ und der Länge eines kürzesten (s, t)-Weges in G maximal ist. Angenommen es gibt eine unerläßliche Kante in G.

(a) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(1.) Eine unerläßlichste Kante e^* ist eine Kante mit maximalem Gewicht: $e^* \in \operatorname{argmax}\{w_e : e \in E\}$.

(2.) Eine unerläßlichste Kante e ist eine Kante mit maximalem Gewicht in einem beliebigen kürzesten (s,t)-Weg in G.

(3.) Eine Kante e, die in keinem kürzesten (s,t)-Weg in G enthalten ist, kann nicht eine unerläßlichste Kante sein.

(4.) Es kann mehrere unerläßlichste Kanten geben.

(b) Entwerfen Sie einen Algorithmus zur Bestimmung einer unerläßlichsten Kante in G.

27. **Das kürzeste Wegeproblem mit Nebenbedingungen.** Gegeben sei ein gerichteter gewichteter Graph $G = (V, E, w)$ mit Kantengewichten w_e und ganzzahligen positiven Durchquerzeiten τ_e, für alle $e \in E$, sowie eine Quelle $s \in V$. Gesucht ist ein kürzester gerichteter (s,t)-Wege für jedes $t \in V \setminus \{s\}$ in G, unter die Nebenbedingung, daß die Durchquerzetien der Wege eine gegebene Konstante T nicht überschreiten. Sei $d_j(\tau)$ die Länge eines kürzesten gerichteten (s,j)-Weges in G dessen Durchquerzeit nicht größer als τ ist. Sei $d_j(\tau) := \infty$ für $\tau < 0$. Beweisen Sie die Korrektheit folgender Gleichungen:

$$d_s(0) = 0, \qquad d_j(\tau) = \min\left\{d_j(\tau - 1), \min_k\{d_k(\tau - \tau_{kj}) + w_{kj}\}\right\}$$

Entwerfen Sie einen Algorithmus für das kürzeste Wegeproblem mit Nebenbedingungen.

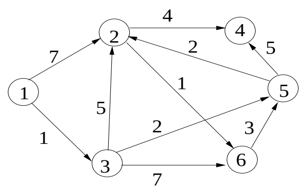

Abbildung 1

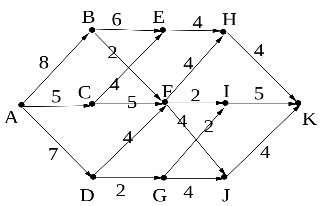

Abbildung 3

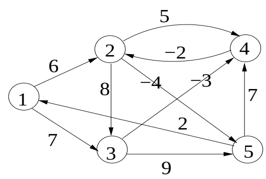

Abbildung 2

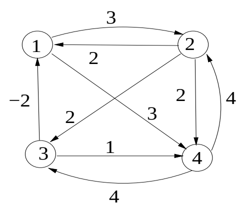

Abbildung 5a

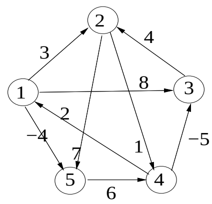

Abbildung 5b