Graphentheoretische Algorithmen SS 2002

2. Übungsblatt

10. Für einen ungerichteten Graph $G = (V, E)$ ist der zugehörige Komplementgraph $G^c = (V, E^c)$ durch folgende Bedingung definiert:

$$\{u, v\} \in E^c \text{ genau dann wenn } \{u, v\} \notin E\,.$$

   (a) Bestimmen Sie die Komplementgraphen der Graphen C_3, C_4, C_5 und C_6, d.h. der Kreise mit 3, 4, 5 bzw. 6 Knoten.

   (b) Zeigen Sie: Wenn ein ungerichteter Graph G mit mindestens 3 Knoten nicht zusammenhängend ist, dann ist G^c zusammenhängend.

11. **Die Schnitt-Optimalitätsbedingung.** Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $T = (V(T), E(T))$ ein spannender Baum in G. Sei $e \in E(T)$ eine Kante des Baums T. Wenn eine Kante e in T gelöscht wird, dann zerfällt T in zwei Zusammenhangskomponenten deren Knotenmengen wir mit V_e und $V \setminus V_e$ bezeichnen. Wir bezeichnen mit C_e den Schnitt $\delta(V_e) = \{e = (u, v) \in E\colon u \in V_e, v \in V \setminus V_e\}$. Beweisen Sie folgende Aussage: T ist ein minimaler spannender Baum in G dann und nur dann wenn $c_e \leq c_p$ für alle Kanten $p \in C_e$ und für jede Kante $e \in E(T)$ gilt.

12. **Die Weg-Optimalitätsbedingung.** Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $T = (V(T), E(T))$ ein spannender Baum in G. Sei $e = (u, v) \in E \setminus E(T)$. Wir bezeichnen mit P_e den eindeutigen (u, v)-Weg in T. Beweisen Sie folgende Aussage: T ist ein minimaler spannender Baum in G dann und nur dann wenn $c_e \geq c_p$ für alle Kanten $p \in P_e$ und für jede Kante $e \in E \setminus E(T)$ gilt.

13. Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph dessen Kanten blau oder rot gefärbt sind. Sei T ein spannender Baum mit k roten Kanten und T' ein spannender Baum mit k' ($k' > k$) roten Kanten in G. Zeigen Sie, daß es für jedes k'', $k < k'' < k'$, einen spannenden Baum mit k'' roten Kanten in G gibt.

14. (Für Ambitionierte und besonderes Interessierte.) Sei $G = (V, E, c)$ ein zusammenhähngender, kantengewichteter Graph mit Kantengewichten c_e, $e \in E$, und $n := |V|$. Betrachten Sie den Spannbaumgraph $\mathcal{T}(G) = (\mathcal{T}, \mathcal{E})$ von G. $\mathcal{T}$ ist die Menge aller spannenden Bäume von G und zwei spannende Bäume T' und T'' sind durch eine Kante in $\mathcal{E}$ genau dann verbunden, wenn $|E(T')\Delta E(T'')| = 2$, wobei $E(T')$ und $E(T'')$ die Mengen der Kanten von T' bzw. T'' sind. ($A\Delta B$ ist die symmetrische Differenz von zwei gegebenen Mengen A und B, i.e. $A\Delta B = \{x\colon x \in A, x \notin B \text{ oder } x \notin A, x \in B\}$.) Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) $\mathcal{T}(G)$ ist zusammenhängend mit Diameter $diam(\mathcal{T}(G)) \leq n - 1$.

   (b) Die Menge der minimalen spannenden Bäume von G induziert einen zusammenhängenden Subgraphen von $\mathcal{T}(G)$.

15. **Parametrische Analyse von minimalen spannenden Bäumen.** Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender gewichteter Graph dessen Kantengewichte als affin-lineare Funktionen eines Parameters λ gegeben sind: $c_e(\lambda) = c_e^0 + \lambda c_e^*$, $\forall e \in E$. Bezeichne mit (G, c) den gewichteten Graphen G mit Kantengewichten $c = (c_e)$. Sei T^λ ein minimaler spannender Baum in $(G, c(\lambda))$.

   (a) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Es gibt eine Konstante $k \in \mathbb{N}$, sodass T^λ ein minimaler oder maximaler spannender Baum in (G, c^*) ist, für alle $\lambda \geq k$ bzw. $\lambda \leq -k$.

   (b) Betrachten wir ein beliebiges $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß es zwei Parametern $\underline{\lambda}$, $\bar{\lambda}$ mit $\underline{\lambda} < \bar{\lambda}$ gibt, sodaß $T^{\tilde{\lambda}}$ ein minimaler spannender Baum in $(G, c(\lambda))$ für alle $\lambda \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$ ist.

   (c) Entwerfen Sie einen Algorithmus zur Bestimmung eines minimalen spannenden Bäumen T^λ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$.

16. **Das spannende Baumproblem mit Engpaßzielfunktion.** Gegeben sei ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten c_e, $e \in E$. Gesucht ist ein spannender Baum $T = (V(T), E(T))$, sodaß $\max_{e \in E(T)} c_e$ minimiert wird. Zeigen Sie, daß jede optimale Lösung des klassischen minimalen spannenden Baumproblems in G auch eine optimale Lösung des spannenden Baumproblems mit Engpaßzielfunktion in G ist. Ist die Umkehrung korrekt? Begründen Sie Ihre Antwort.

17. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Kantengewichten c_e, $e \in E$. Für jede Kante e führen wir die Menge $M_e := \{f : f \in E, c_f \leq c_e\}$ ein. Sei $e_0 \in E$ folgendermaßen gegeben:

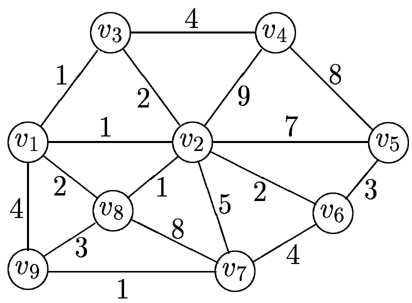
$$e_0 \in \operatorname{argmin}\{c_e : e \in E, M_e \text{ enthält die Kantenmenge eines spannenden Baumes in G}\}.$$

Zeigen Sie, daß c_{e_0} der optimale Zielfunktionswert für das spannende Baumproblem mit Engpaßzielfunktion in G ist. Nützen Sie den obigen Sachverhalt um einen Algorithmus für das spannende Baumproblem mit Engpaßzielfunktion zu entwickeln.

18. Bestimmen Sie einen minimalen spannenden Baum in dem Graphen aus untenstehender Abbildung

    (a) mit dem Greedy-Verfahren von Kruskal,

    (b) mit dem Verfahren von Prim.



19. Sei $G = (V, E)$ ein gewichteter Graph mit beliebigen reellwertigen Kantengewichten. Entwerfen Sie einen Algorithmus zur Bestimmung eines spannenden zusammenhängenden Untergraphen $H = (V(H), E(H))$ mit minimalem Gewicht in G.

20. Zeigen Sie, daß es für jedes minimale spannende Baumproblem P in einem zusammenhähgenden Graphen mit beliebigen reellwertigen Kantengewichten ein minimales spannendes Baumproblem P_1 in einem zusammenhähgenden Graphen mit nicht-negativen Kantengewichten gibt, sodaß P und P_1 äquivalent sind.