Graphentheoretische Algorithmen SS 2002

1. Übungsblatt

1. (a) Wenden Sie den in der Vorlesung beschriebenen Algorithmus an, um in den in Abb. 1 abbgebildeten Straßenkanten ein Einbahnstraßensystem einzuführen, falls es überhaupt möglich ist.

   (b) Läßt sich jede starke Orientierung eines Graphen durch den in der Vorlesung beschriebenen Algorithmus erzeugen?

2. Entwickeln sie "eine Theorie" für effiziente Einbahnstraßensysteme:

   (a) Geben Sie Beispiele für effiziente und nicht effiziente Einbahnstraßensysteme an.

   (b) Wie effizient ist ein Straßensystem, in dem die Einbahnstraßen alternierend ausgerichtet sind (vgl. Abb. 2)?

   (c) (Für Ambitionierte und besonderes Interessierte.)

      (c1) Entwickeln Sie einen Algorithmus zur Erzeugung effizienter Einbahnstraßensysteme bzgl. eines von Ihnen gewählten Effizienzmaßes.

      (c2) Entwickeln Sie ein Verfahren zur Erzeugung stark ineffizienter Einbahnstraßensysteme.

3. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph ohne Schleifen. Bezeichne $c(G)$ die Länge eines kürzesten Kreises in G (bzgl. der Kantenanzahl), falls G einen Kreis enthählt; ansonsten setze man $c(G) = 0$. Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus zur Bestimmung von $c(G)$.

4. Entwerfen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus zur Entscheidung, ob ein gegebener gerichteter Graph einen (gerichteten) Kreis besitzt. Welche Laufzeit weist Ihr Algorithmus auf?

5. Bestimmen Sie unter Verwendung des in der Vorlesung vorgestellten Algorithmus eine topologische Sortierung des in Abb. 4 abbgebildeten gerichteten Graphen.

6. Zeigen Sie daß die folgende Strategie für die Bestimmung einer topologischen Sortierung eines gerichteten azyklischen Graphen $G = (V, E)$ verwendet werden kann: Finde eine Knoten v sodaß $\mathrm{EinGrad}(v) = 0$, nummeriere ihn mit Hilfe eines Zählers, entferne diesen Knoten sowie die aus v hinausfüfrenden Kanten aus dem Graphen und erhöhe den Wert des Zählers um eins. Wiederhole den obigen Schritt solange der Graph G nicht leer ist (d.h. G enthält mindestens einen Knoten). Der Zähler wird mit eins initialisiert.

   Wie kann dieser Algorithmus implementiert werden, sodaß er eine Laufzeit von $O(|V|+|E|)$ aufweist? Wie reagiert dieser Algorithmus wenn G nicht azyklisch ist?

7. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und sei W ein spannender Wald in G. Entwickeln Sie ein Verfahren, das jedem Knoten von W (oder äquiv. jedem Knoten von G) eine Zahl aus $\{0, 1\}$ zuordnet, sodaß für jede Kante (i, j) des Waldes, die den Endknoten i und j zugeordneten Zahlen verschieden sind.

   Zeigen Sie, daß G dann und nur dann bipartit ist, wenn für jede Kante (i, j) von G, die den Endknoten i und j zugeordneten Zahlen verschieden sind. Verwenden sie diese Charakterisierung, um einen $O(|V| + |E|)$ Algorithmus zu entwickeln, der entscheiden kann, ob G bipartit ist.

8. Bestimmen Sie unter Verwendung des in der Vorlesung vorgestellten Algorithmus die starken Zusammenhangskomponenten des Graphen in Abb. 3.

9. **Arikulationsknoten, Brücken und zweifach Zusammenhangskomponenten**

   Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängende, ungerichtete Graph. Ein Knoten $v \in V$ heißt *Artikulationsknoten* (oder *Schnittknoten*) wenn durch die Entfernung von v und von den mit v inzidierenden Kanten der Graph G in zwei oder mehrere Zusammenhangskomponenten zerfällt. Eine Kante $e \in E$

heißt *Brücke*, wenn durch die Entfernung von e der Graph G in zwei Zusammenhangskomponenten zerfällt. Eine Menge von Kanten $E' \subseteq E$ heißt *zweifach Zusammenhangskomponente* von G, wenn E' eine maximale Menge von Kanten ist, die die folgende Eigenschaft besitzt: für je zwei Kanten aus E' gibt es einen einfachen Kreis, der beide Kanten enthählt. Siehe Abb. 5 für ein illustrierendes Beispiel: Die schwarzen Knoten sind die Artikulationsknoten, die dickeren Kanten sind die Brücken und die eingekreisten Kantenmengen sind die zweifachen Zusammmenhangskomponenten. Man sieht, daß die zweifachen Zusammenhangskomponenten i.a. nicht Knoten-disjunkt sind.

Artikulationsknoten, Brücken und zweifach Zusammenhangskomponenten kann man auch mit Hilfe der Tiefensuche definieren. Sei $T = (V, E_1)$ ein Tiefensuchebaum in G.

(a) Zeigen Sie, daß die Wurzel r von T dann und nur dann ein Artikulationsknoten ist, wenn r mindestens zwei unmittelbare Nachfolger in T hat.

(b) Sei $v \in V$, $v \neq r$. Zeigen Sie, daß v dann und nur dann ein Artikulationsknoten ist, wenn es in T einen Sohn (d.h. einen unmittelbaren Nachfolger) s von v gibt, sodaß es keine Rückwärtskante (u, w) in G zwischen einem Nachfolger u von s und einem echten Vorgänger w von v in T existiert. (Achtung: Vorgänger $\neq$ unmittelbarer Vorgänger!)

(c) Der Vector $h(v)$, $v \in V$, sei folgendermaßen definiert:

$$h(v) := \min\Big\{a(v), \min\{a(w) \colon \exists \text{ ein Nachfolger } u \in V \text{ von } v \text{ und eine RWK } (u,w) \text{ in } G\}\Big\},$$

wobei $a(v)$, $v \in V$, die in der Vorlesung definierten Entdeckungszeiten sind.
Zeigen Sie, daß der Vektor $h(v)$ in $O(|V| + |E|)$ Zeit berechnet werden kann.

(d) Zeigen Sie, daß alle Artikulationsknoten in G in $O(|V| + |E|)$ Zeit berechnet werden können.

(e) Zeigen Sie, daß $e \in E$ dann und nur dann eine Brücke ist, wenn e in keinen Kreis ohne Schleifen in G liegt.

(f) Zeigen Sie, daß alle Brücken in G in $O(|V| + |E|)$ Zeit berechnet werden können.

(g) Zeigen Sie, daß die zweifachen Zusammenhangskomponenten von G eine Zerlegung der Menge der Kanten $\{e \in E \colon e \text{ ist keine Brücke}\}$ liefern.

(h) Entwickeln Sie einen $O(|V| + |E|)$ Algorithmus, der die Kanten aus E so etikettiert, daß die Etiketten $2\_zshg(e)$, $e \in E$, die folgende Eigenschaft besitzen:

$$2\_zshg(e) = 2\_zshg(e') \Leftrightarrow e \text{ und } e' \text{ liegen in derselben zweifachen Zusammenhangskomponente.}$$

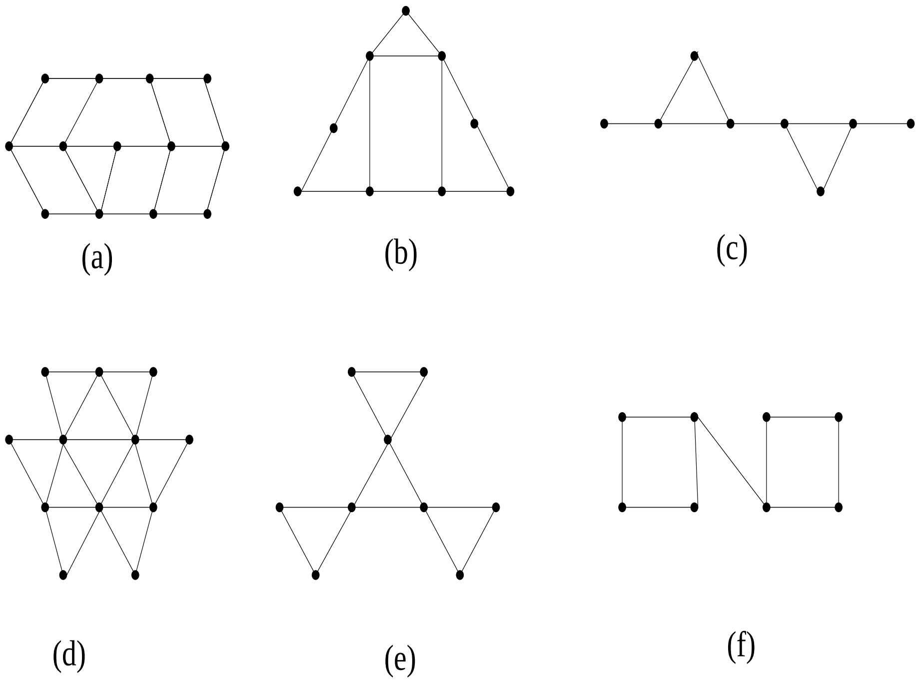


Abbildung 1

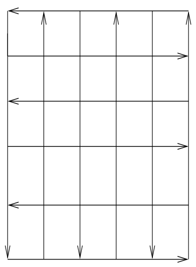
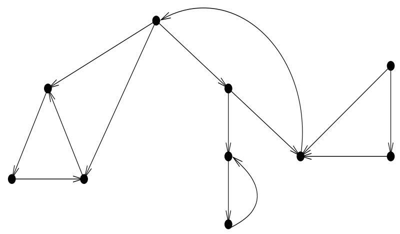


Abbildung 2



Abblildung 3

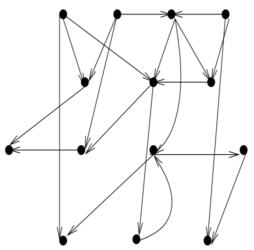


Abbildung 4

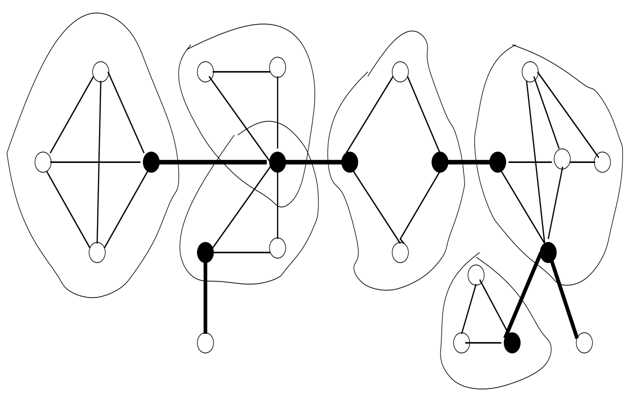


Abbildung 5