2.1 Bäume: Definitionen und Charakterisierungen

Ein Graph heißt ein *Baum*, wenn er zusammenhängend ist und keinen Kreis enthält. Kreisfreie Graphen, die nicht zusammenhängen, heißen *Wälder*, weil ihre Zusammenhangskomponenten Bäume sind. Ein Graph mit endlicher Knotenmenge V ohne Schlingen und ohne Mehrfachkanten heißt *einfacher Graph.*
Bäume können auf vielerlei Weise charakterisiert werden. Einige wichtige Beschreibungen werden in den folgenden Sätzen an gegeben.

Satz 2.1 *(Charakterisierung von Bäumen, I)*
Sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. *G ist ein Baum.*
2. *G ist maximal kreisfrei: G hat keinen Kreis, aber fügt man eine beliebige neue Kante hinzu, so enthält der neue Graph einen Kreis.*
3. *Zwischen jedem Knotenpaar u und v von G gibt es einen eindeutigen Weg von u nach v.*
4. *G ist minimal zusammenhängend: G ist zusammenhängend, aber streicht man eine beliebige Kante von E, so zerfällt G in zwei Zusammenhangskomponenten.*

Beweis:

(1) $\Rightarrow$ (2) Sei $[u, v]$ die neu hinzugefügte Kante. Da G zusammenhängend ist, gibt es in G einen einfachen Weg von v nach u. Dieser bildet zusammen mit der Kante $[u, v]$ einen Kreis.

(2) $\Rightarrow$ (3) Seien u und v zwei verschiedene Knoten von G. Wenn u und v nicht verbunden wären, könnte man zu G die neue Kante $[u, v]$ hinzufügen, ohne einen Kreis zu erzeugen. Dies steht im Widerspruch zu (2). Wären aber u und v durch zwei verschiedene Wegen verbunden, so würden diese zusammengenommen einen Kreis enthalten. Also gibt es zwischen zwei Knoten von G stets einen eindeutigen Weg.

(3) $\Rightarrow$ (4) G ist zusammenhängend, da jedes Knotenpaar durch einen Weg verbunden ist. Wird eine Kante $[u, v]$ gestrichen, ist der neue Graph nicht mehr zusammenhängend, da nun die Knoten u und v nicht mehr verbunden sind. (Die Kante $[u, v]$ war ja der eindeutige Weg nach Punkt (3).)

(4) $\Rightarrow$ (1) Nach Voraussetzung ist G zusammenhängend. Würde G einen Kreis enthalten, könnte eine beliebige Kante des Kreises gestrichen werden, ohne den Zusammenhang von G zu zerstören. Dies widerspricht (4).

$\blacksquare$

Bei Bäumen besteht ein interessanter Zusammenhang zwischen der Anzahl ihrer Knoten und Kanten. Als *Blatt* des Baumes $G = (V, E)$ bezeichnen wir einen Knoten v mit $d(v) = 1$. Zunächst gilt

Lemma 2.2 *Jeder Baum mit mindestens 2, aber endlich vielen Knoten hat mindestens zwei Blätter.*

Beweis:
Nimmt man an, daß jeder Knoten von G einen Grad ≥ 2, so kann man von einem beliebigen Knoten ausgehend in den nächsten Knoten hinein und auf einer anderen Kante auch wieder herausgehen. Da nur endlich viele Knoten zur Verfügung stehen, enthält der auf diese Weise gefundene Weg einen Kreis. Daher muß es mindestens ein Blatt v_1 geben. Um die Existenz eines zweiten Blattes zu zeigen, beginnt man den

Weg nun im Blatt v_1 und führt nochmals die gleiche Konstruktion durch. Es gibt drei mögliche Resultate:
1) Kann man den Weg beliebig lang fortsetzen, dann muß sich ein Knoten wiederholen, also enthält G einen Kreis.
2) Die Konstruktion endet wieder in v_1. Dann enthält der Weg wieder einen Kreis. 3) Die Konstruktion läßt sich im Knoten $v_2 (v_2 \neq v_1)$ nicht fortsetzen. Damit ist v_2 das zweite Blatt. Da G als kreisfrei vorausgesetzt war, muß immer der dritte Fall eintreten.

Würden wir Graphen zulassen, in denen V nicht endlich wäre, so würde obiges Argument nicht gelten. Tatsächlich lassen sich auf ganz einfache Weise unendliche Bäume ohne Blätter angeben, z.B. $V = \mathbf{Z}$ und $E = \{[n, n+1] \mid n \in \mathbf{Z}\}$.
Nun gilt

Satz 2.3 *(Charakterisierung von Bäumen, II)*

Sei G ein einfacher Graph mit n Knoten und und m Kanten. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. *G ist ein Baum.*
2. *G ist kreisfrei und $m = n - 1$.*
3. *G ist zusammenhängend und $m = n - 1$.*

Beweis:

(1) $\Rightarrow$ (2): Ein Baum ist immer kreisfrei. Die Gleichung $m = n - 1$ zeigen wir durch Induktion: Für $n = 1$, d.h. einen Baum, der nur aus einem Knoten besteht, ist diese Beziehung trivial. Nehmen wir an, sie gilt für alle Bäume mit $n - 1$ Knoten, $n \geq 2$.

Sei nun G ein Baum mit n Knoten. Nach Lemma 1.3 besitzt G ein Blatt. Wir streichen dieses mit der zugehörigen Kante. Zurück bleibt ein Baum mit $n - 1$ Knoten und nach Induktionsannahme $n - 2$ Kanten. Daher hat G $n - 1$ Kanten.

(2) $\Rightarrow$ (3): Der gegebene Graph habe n Knoten, $n - 1$ Kanten und keine Kreise. Sei p die Anzahl seiner Zusammenhangskomponenten. Für $n = 2$ ist G offenbar zusammehängend. Wir können damit annehmen, daß alle kreisfreien, einfachen Graphen mit $\bar{n} < n$ Knoten und $\bar{n} - 1$ Kanten zusammenhängend sind. Da G mit n Knoten kreisfrei ist, ist jede Zusammenhangskomponente ein Baum mit n_i Knoten und $n_i - 1$ Kanten. Summiert man über alle Zusammenhangskomponenten, so erhält man für die Kantenanzahl von G

$$n - 1 = m = \sum_{i=1}^{p} = \sum_{i=1}^{p} (n_i - 1) = \sum_{i=1}^{p} n_i - p = n - p.$$

Also ist $p = 1$ und daher G zusammenhängend.

(3) $\Rightarrow$ (1): Der gegebene Graph habe n Knoten, $n - 1$ Kanten und sei zusammenhängend. Wir können in G nun solange Kanten streichen, bis der entstehende Graph G' mit n Knoten keine Kreise mehr enthält.

G' ist dann ein Baum und nach (1) $\Rightarrow$ (2) gilt, daß G' genau $n - 1$ Kanten besitzt. Also gilt $G = G'$.

■

Sei G ein zusammenhängender Graph. Ein *spannender Baum* T von G ist ein Teilgraph von G, der ein Baum ist und dieselbe Knotenmenge wie G hat. Daher besitzt ein spannender Baum die gleiche Knotenanzahl wie G, aber nur $n - 1$ Kanten. Er ist zusammenhängend und kreisfrei. In allgemeinen gibt es zu einem Graphen G viele verschiedene spannende Bäume (vgl. Abbildung 1)

Weiters werden wir das Konzept eines Schnitts gebrauchen. Ist ein Graph $G(V, E)$ gegeben, so bezeichnet man eine Partition der Knotenmenge V in zwei nichtleere Teilmengen X und Y einen *Schnitt* in G, siehe Abb. 2. Eine Kante $e = [u, v]$ liegt im Schnitt, wenn $u \in X$ und $v \in Y$ gilt.

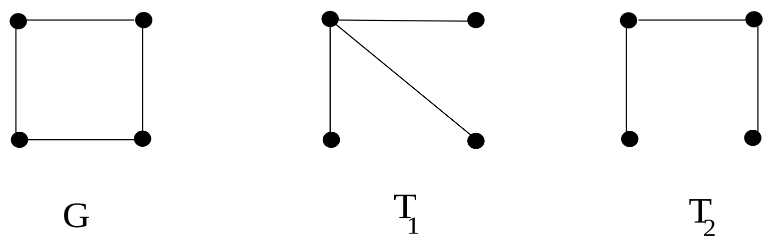

Abbildung 1: G und zwei seiner spannenden Bäume

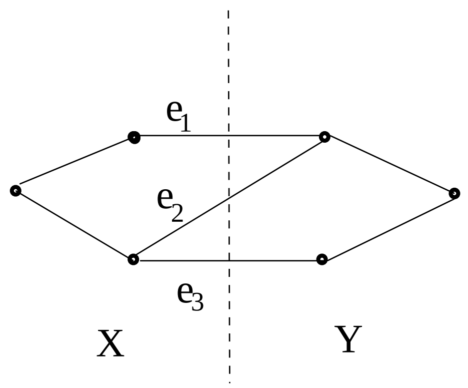

Abbildung 2: Die Kanten e_1, e_2 und e_3 liegen im Schnitt