2.6 Das Kruskal-Verfahren und die Ackermann-Funktion

Algorithmus von Kruskal

1. Input: ungerichteter zusammenhängende gewichtete Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $w(i, j)\ \forall\ (i, j) \in E$.
2. Sortiere die Kanten nach aufsteigendem Gewicht:
$$w(e_1) \le w(e_2) \le \ldots \le w(e_m).$$
3. Setze $E(T) := \{e_1\}$ und $i := 2$.
4. Enthält $E(T) \cup \{e_i\}$ einen Kreis, so gehe zu Schritt 7.
5. $E(T) := E(T) \cup \{e_i\}$.
6. Falls $|E(T)| = n - 1$, gehe zu Schritt 8.
7. Setze $i := i + 1$ und gehe zu Schritt 4.
8. Terminiere. Output den minimalen spannenden Baum $T = (V, E(T))$.

Die Ackermann-Funktion wurde von Ackermann (1928) folgendermaßen definiert:
Ackermann-Funktion:
$$A(i,j) := \begin{cases} j+1 & \text{, falls } i = 0 \\ A(i-1, 1) & \text{, falls } j = 0 \\ A(i-1, A(i, j-1)), & \text{falls } i, j > 0 \end{cases}$$

Im Zusammenhang mit dem Union-Find Problem modifiziert Tarjan (1983) die Ackermann-Funktion zu
$$A(i,j) := \begin{cases} 2^j & \text{, falls } i = 1,\ j \ge 1 \\ A(i-1, 2) & \text{, falls } i \ge 2,\ j = 1 \\ A(i-1, A(i, j-1)), & \text{falls } i, j \ge 2. \end{cases}$$

Als *inverse Ackermann Funktion* $\alpha(m, n)$ definiert er folgendermaßen
$$\alpha(m, n) := \min\{i \ge 1 \colon A(i, \lfloor m/n \rfloor) > \log n\}.$$