Tutorium Mathematik II M WM VT
SS 2011

13. Mai 2011 - Lösung Bsp. 3

1. Berechnen Sie das Volumen des Bereiches, der von den beiden Flächen $x^2 + y^2 = 1 + z^2$ und $x^2 + y^2 = 2 - z^2$ begrenzt wird, und den Punkt $(0, 0, 0)$ enthält. (Alle Zwischenschritte sind anzuführen.)

   Lösung

   $x^2 + y^2 = 1 + z^2$ ist äquivalent zu $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ und stellt somit ein einschaliges Hyperbolid dar. In Zylinderkoordinaten lautet die obige Gleichung $r^2 - z^2 = 1$.

   $x^2 + y^2 = 2 - z^2$ ist äquivalent zu $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ und stellt somit eine Kugel mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius $\sqrt{2}$ dar. In Zylinderkoordinatenlautet die obige Gleichung $r^2 + z^2 = 2$. Der Körper, der durch das Hyperboloid und durch die Kugel begrenzt wird und den Punkt $(0, 0, 0)$ enthält, ist ein symmetrischer Rotationskörper. Der Schnitt dieses Körpers mit der xz-Ebene ist in Abbildung 1 dargestellt. Der Rotationskörper entsteht, wenn dieser Schnitt um die z-Achse rotiert.

   Das Volumen wird in Zylinderkoordinaten berechnet. Aus Abb. 1 sieht man, dass z sich zwischen $-\sqrt{2}$ und $\sqrt{2}$ bewegt. (Dies ergibt sich aus der Tatsache, daß der Radius der Kugel gleich $\sqrt{2}$ ist.) Da es sich um einen Rotationskörper handelt, ist für ϕ das Intervall $[0, 2\pi]$ als Integrationsbereich zu wählen. Um die Integrationsgrenzen für r und für z zu bestimmen, schneiden wir die beiden Randflächen $r^2 + z^2 = 2$ und $r^2 - z^2 = 1$. In der rz-Ebene handelt es sich um einen Kreis mit Radius $\sqrt{2}$ sowie um eine gleichseitige Hyperbel. Für die Schnittpunkte gilt $z^2 = \frac{1}{2}$ und $r^2 = \frac{3}{2}$. Auf diese Weise erhält man 4 Schnittpunkte (vgl. auch Abb. 1).

   Man sieht leicht ein, daß für $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq z \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ die Hyperbel $r^2 - z^2 = 1$ die Begrenzung des gesuchten Bereiches definiert. Damit erfolgt im $\mathbb{R}^3$ die Begrenzung durch das Hyperboloid. Somit hat man in diesem Fall $0 \leq r \leq \sqrt{1 + z^2}$. Für $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq \sqrt{2}$ wird der Körper durch die Kugelfläche begrenzt. Somit hat man $0 \leq r \leq \sqrt{2 - z^2}$.

   Zusammenfassend sind die Grenzen folgendermaßen gegeben:

$$0 \leq \phi \leq 2\pi\,, \quad 0 \leq |z| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ und } 0 \leq r \leq \sqrt{1 + z^2}$$
$$\text{sowie} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq \sqrt{2} \text{ und } 0 \leq r \leq \sqrt{2 - z^2}\,.$$

   Somit gilt für das gesuchte Volumen:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{1+z^2}} r dr dz d\phi + \int_0^{2\pi} \int_{-\sqrt{2}}^{-1/\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-z^2}} r dr dz d\phi + \\ &\quad \int_0^{2\pi} \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-z^2}} r dr dz d\phi = \\ &= 2 \left(\underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{1+z^2}} r dr dz d\phi}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-z^2}} r dr dz d\phi}_{I_2} \right) \end{aligned} \qquad (1)$$

   wobei die letzte Gleichung aus Symmetriegründen gilt.

Die Integrale I_1 und I_2 werden folgendermaßen berechnet:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{2\pi}\int_0^{1/\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{1+z^2}} r\,drdzd\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{r^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{1+z^2}} dzd\phi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1+z^2\right)dzd\phi \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(z+\frac{z^3}{3}\right)\Big|_0^{1/\sqrt{2}} d\phi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{6\sqrt{2}}\right)d\phi = \frac{7}{12\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} d\phi = \frac{7\sqrt{2}\pi}{12}\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{2\pi}\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-z^2}} rdrdzd\phi = \int_0^{2\pi}\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{2-z^2}} dzd\phi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(2-z^2\right)dzd\phi \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(2z-\frac{z^3}{3}\right)\Big|_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} d\phi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(2\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{1}{6\sqrt{2}}\right)d\phi \\
&= \frac{5}{12\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} d\phi = \frac{5\sqrt{2}\pi}{12}\,.
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen in (1) erhalten wir

$$V = 2\left(\frac{7\sqrt{2}\pi}{12}+\frac{5\sqrt{2}\pi}{12}\right) = 2\sqrt{2}\pi\,.$$