Tutorium Mathematik II M WM VT

SS 2011

8. April 2011 - Lösungen

2. Überprüfen Sie die folgenden Integrale auf Existenz:

   (a)
$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{e^x(\sqrt{x}+x)}$$

   (b)
$$I_2 = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}$$

   (c)
$$I_3 = \int_0^\infty \frac{dx}{x\,(1+\sqrt{x})}$$

   Lösung:

   (a) Da für $x \in [0,\, 1]$ stets $e^x > 1$ ist, gilt
$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{e^x(\sqrt{x}+x)} \le \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+x} \le \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon \to 0} 2\sqrt{x}\,\Big|_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon \to 0} 2(1-\sqrt{\epsilon}) = 2.$$
   D.h. die Majorante $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ konvergiert und somit konvergiert auch das ursprüngliche Integral I_1.

   (b) Wir teilen das Integrationsintervall auf,
$$I_2 = I_{2a} + I_{2b} \text{ wobei}$$
$$I_{2a} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}} \le \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$
$$I_{2b} = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}} \le \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}.$$
   Im Punkt [(a)] haben wir gezeigt, dass das Integral $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ existiert, daher existiert auch das Integral I_{2a}. Das Integral I_{2b} existiert auch weil die dazugehörige Majorante existiert:
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{N\to\infty} \int_1^N \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^N = \lim_{N\to\infty}(1-\frac{1}{N}) = 1\,.$$
   Da beide Teilintegrale I_{2a} und I_{2b} existieren, existiert auch das Gesamtintegral I_2.

   (c) Wir teilen hier den Integrationsbereich ebenfalls auf, können aber vermuten, dass das Integral wegen des Verhaltens bei $x = 0$ divergiert:
$$I_3 = I_{3a} + I_{3b} \text{ wobei}$$
$$I_{3a} = \int_0^1 \frac{dx}{x+x^{3/2}} \ge \int_0^1 \frac{dx}{x+x} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon\to 0}(\ln|x|)\Big|_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon\to 0}(-\ln\epsilon) = \infty\,.$$
$$I_{3b} = \int_1^\infty \frac{dx}{x+x^{3/2}}$$
   I_3 divergiert, weil das Integral I_{3a} nicht existiert.

3. Es sei

$$I := \int\limits_{x=-1}^{1} \int\limits_{y=-|2x|}^{0} (y + \sin x)\ dy\, dx.$$

(a) Zu berechnen ist der Wert des Integrals

$$I := \int_{x=-1}^{1} \int_{y=-|2x|}^{0} (y + \sin x)\, dydx.$$

Wir lösen die Betragsfunktion in der unteren Grenze auf und teilen das Integral somit in 2 Teile auf. Da $|2x| = 2x$ für $x \geq 0$ gilt und $|2x| = -2x$ für $x \leq 0$, teilt man das Intervall $[-1, 1]$ für x in die 2 Intervalle $[-1, 0]$ und $[0, 1]$ auf. Es ergibt sich auf diesem Weg

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_{x=-1}^{0} \int\limits_{y=2x}^{0} (y + \sin x)\ dy\, dx + \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=-2x}^{0} (y + \sin x)\ dy\, dx \\
&= \int_{x=-1}^{0} \left(\frac{y^2}{2} + y \sin x\right)\Big|_{2x}^{0} dx + \int_{x=0}^{1} \left(\frac{y^2}{2} + y \sin x\right)\Big|_{-2x}^{0} dx \\
&= \int_{x=-1}^{0} \left(-\frac{4x^2}{2} - 2x \sin x\right) dx + \int_{x=0}^{1} \left(-\frac{4x^2}{2} + 2x \sin x\right) dx \\
&= \int_{x=-1}^{1} -2x^2\, dx - \int_{x=-1}^{0} 2x \sin x\, dx + \int_{x=0}^{1} 2x \sin x\, dx \\
&= -2\frac{x^3}{3}\Big|_{x=-1}^{1} - \int_{x=-1}^{0} 2x \sin x\, dx + \int_{x=0}^{1} 2x \sin x\, dx \\
&= -\frac{4}{3} - \int_{x=-1}^{0} 2x \sin x\, dx + \int_{x=0}^{1} 2x \sin x\, dx
\end{aligned}$$

Als nächstes berechnen wir nun das unbestimmte Integral $\displaystyle\int x \sin x dx$. Hierzu wenden wir die Methode der partiellen Integration mit $u := x$ und $v' := \sin x$ an. Daraus folgt $u' = 1$ und $v = \int \sin x dx = -\cos x$. Wir erhalten somit

$$\int x \sin x\, dx = -x \cos x + \int \cos x\, dx = -x \cos x + \sin x\,.$$

Somit ergibt sich für I

$$\begin{aligned}
I &= -\frac{4}{3} - 2\left(-x \cos x + \sin x\right)\Big|_{-1}^{0} + 2\left(-x \cos x + \sin x\right)\Big|_{0}^{1} = \\
&= -\frac{4}{3} - 2(-\cos(-1) - \sin(-1)) + 2(-\cos 1 + \sin 1) \\
&= -\frac{4}{3} - 2(-\cos 1 + \sin 1) + 2(-\cos 1 + \sin 1) = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Man sieht übrigens auch ohne Integrieren, daß $-\int_{x=-1}^{0} 2x \sin x\, dx + \int_{x=0}^{1} 2x \sin x\, dx = 0$ gilt, da die Funktion $2x \sin x$ symmetrisch ist und daher $\int_{x=-1}^{0} 2x \sin x\, dx = \int_{x=0}^{1} 2x \sin x\, dx$ gilt.

(b) Um die Integrationsreihenfolge in I zu vertauschen, fertigen wir zunächst eine Skizze des Integrationsbereichs an (siehe Abbildung 1). Nach der Vertauschung muß y die äußere Integrationsvariable sein und x die innere. Die Grenzen für y müssen also Konstante sein (und dürfen nicht von x abhängen) während die Grenzen für x sehr wohl von y abhängen dürfen.

Aus Abbildung 1 ist ersichtlich, daß in diesem Beispiel y zwischen -2 und 0 variiert, d.h. es gilt $-2 \leq y \leq 0$. Nun gilt es die Grenzen für x zu ermitteln. Zu diesem Zweck halten wir y fest. Aus Abbildung 1 sieht man leicht, daß für ein fixes $y \in [-2, 0]$ die Variable x sich zwischen -1 und $\frac{y}{2}$ bzw. aaaaaaaaazwischen $-\frac{y}{2}$ und 1 bewegt. Daraus ergibt sich die folgende Aufteilung:

$$I := \int_{y=-2}^{0} \int_{-1}^{\frac{y}{2}} (y + \sin x)\, dx + \int_{y=-2}^{0} \int_{-\frac{y}{2}}^{1} (y + \sin x)\, dxdy\,.$$

4. Für das Integral gilt:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{kx}\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} e^{kx}\, dx = \lim_{a \to -\infty} \frac{e^{kx}}{k}\Big|_{a}^{0} = \frac{1}{k}\,.$$

Somit gilt für die Reihe:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{0} e^{kx}\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \infty\,,$$

weil die harmonische Reihe divergent ist.