Tutorium Mathematik II M WM VT

SS 2011

1. April 2011 - Lösungen

2. Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y,z) = \sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}$$

für $x, y, z \geq 0$. Bestimmen Sie die Extrema von f (und deren Typ) unter der Nebenbedingung $x + y + z = \pi$.

Lösung.

Da auch der Typ der Extrema gefragt ist und sich die Nebenbedingung leicht auflösen läßt, ist eine Anwendung der Langrange-Methode nicht zielführend.

Durch Auflösung der Nebenbedingung $x+y+z = \pi$ nach z erhalten wir $z = \pi - x - y$. Wir setzen nun diesen Ausdruck für z in die Funktion f ein und erhalten eine neue Funktion g, die nur noch von x und y abhängt. Es gilt

$$g(x,y) = f(x,y,\pi - x - y) = \sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{y}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right).$$

Gesucht sind nun die lokalen Extrema der Funktion g. Nebenbedingungen liegen keine mehr vor. Zur Bestimmung der lokalen Extrema von g bestimmen wir die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung. Die Berechnung der Ableitungen wird erleichtert, wenn wir die Funktion g durch Anwendung der Beziehung $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$ wie folgt umschreiben:

$$g(x,y) = \sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{y}{2}\cdot\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right).$$

Für die partiellen Ableitung g_x erhält man nun

$$g_x(x,y) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) - \sin\frac{x}{2}\cdot\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)\right)\sin\frac{y}{2} \tag{1}$$

Nach dem Additionstheorem für die Cosinus-Funktion gilt $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$. Setzt man im obigen Ausdruck $\alpha = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}$ und $\beta = \frac{x}{2}$, so läßt sich (1) wie folgt umformen

$$g_x(x,y) = \frac{1}{2}\cos\left(x + \frac{y}{2}\right)\cdot\sin\frac{y}{2}$$

Auf analogem Weg (oder durch Symmetrieüberlegungen) erhält man

$$g_y(x,y) = \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\left(\frac{x}{2} + y\right).$$

Die Ableitungen zweiter Ordnung haben die folgende Gestalt:

$$g_{xx}(x,y) = -\frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{y}{2}\right)\cdot\sin\frac{y}{2}$$

$$g_{yy}(x,y) = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2} + y\right)\cdot\sin\frac{x}{2}$$

$$g_{xy}(x,y) = \frac{1}{4}\left(\cos\frac{y}{2}\cdot\cos\left(x + \frac{y}{2}\right) - \sin\frac{y}{2}\cdot\sin\left(x + \frac{y}{2}\right)\right) = \frac{1}{4}\cos\left(x + y\right).$$

Um die kritischen Punkte (=Kandidaten für lokale Extrema) zu ermitteln, setzen wir den Gradienten gleich dem Nullvektor. Es ergeben sich folgende zwei Forderungen

$$g_x(x,y) = \frac{1}{2}\cos\left(x + \frac{y}{2}\right)\cdot\sin\frac{y}{2} = 0$$

und

$$g_y(x,y) = \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\left(\frac{x}{2}+y\right) = 0$$

Da ein Produkt von 2 Faktoren genau dann Null ist, wenn zumindest einer der beiden Faktoren gleich Null ist, unterscheiden wir nun 4 Fälle.

(a) $\sin\frac{x}{2} = 0$ und $\sin\frac{y}{2} = 0$.
Da nach Voraussetzung $0 \leq x, y \leq \pi$ gilt, folgt $x = 0$ und $y = 0$.

(b) $\sin\frac{x}{2} = 0$ und $\cos\left(x + \frac{y}{2}\right) = 0$.
Aus $\sin\frac{x}{2} = 0$ und $0 \leq x \leq \pi$ folgt $x = 0$. Einsetzen in die zweite Bedingung liefert dann zusammen mit $0 \leq y \leq \pi$, daß $y = \pi$ gelten muß.

(c) $\sin\frac{y}{2} = 0$ und $\cos\left(y + \frac{x}{2}\right) = 0$.
Analoge Vorgangsweise wie im obigen Fall liefert $x = \pi$ und $y = 0$. (Stattdessen kann auch über die Symmetrie argumentiert werden.)

(d) $\cos\left(x + \frac{y}{2}\right) = 0$ und $\cos\left(y + \frac{x}{2}\right) = 0$.
Da $x + y + z = \pi$ und $x, y, z \geq 0$ zu gelten hat, folgt $0 \leq x + y \leq \pi$. Somit gilt dann auch $0 \leq \frac{x}{2} + y \leq \pi$ und $0 \leq \frac{y}{2} + x \leq \pi$. Daher können die obigen zwei Bedingungen nur für $\frac{x}{2} + y = \frac{\pi}{2}$ und $\frac{y}{2} + x = \frac{\pi}{2}$ erfüllt sein. Lösen dieses Gleichungssystems ergibt $x = y = \frac{\pi}{3}$.

Es gilt nun die vier kritischen Punkte $S_1 = (0,0)$, $S_2 = (0,\pi)$, $S_3 = (\pi,0)$ und $S_4 = (\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$ zu untersuchen. Dazu müssen wir die Hessematrix H_g von g in diesen vier Punkten auswerten.

Es ergibt sich

$$M_1 = H_g(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \qquad M_2 = H_g(\pi,0) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$M_3 = H_g(0,\pi) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \qquad M_4 = H_g(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Die Matrizen M_1, M_2 und M_3 sind indefinit (ihre Determinante ist < 0). Die Matrix M_4 is negativ definit (ihre Determinate ist positiv und das Element in der ersten Zeile und Spalte ist negativ).

Somit liegt für $x = \frac{\pi}{3}$ und $y = \frac{\pi}{3}$ ein **lokales Maximum** der Funktion g vor. Setzt man in die Nebenbedingung ein, so ergibt sich $z = \frac{\pi}{3}$. Der Funktionswert an der Stelle $x = \frac{\pi}{3}$, $y = \frac{\pi}{3}$ und $z = \frac{\pi}{3}$ beträgt $\frac{1}{8}$. Der Punkt $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{1}{8})$ (4 Koordinaten!!) stellt somit ein **lokales Maximum** von f dar.

Analog ergibt sich, daß die Punkte $(0,0,\pi,0)$, $(0,\pi,0,0)$ und $(\pi,0,0,0)$ **Sattelpunkte** von f darstellen. Da $\sin u \geq 0$ für alle $u \in [0,\frac{\pi}{2}]$ gilt, folgt $f(x,y,z) \geq 0$ auf dem von uns betrachteten Bereich. Daher stellen die drei Punkte $(0,\pi,0,0)$, $(\pi,0,0,0)$ und $(0,0,\pi,0)$ alle zugleich **globale Minima** von f dar.

3. Wo nimmt die Funktion $f(x,y,z) = xyz$ auf der abgeschlossenen Kugel $B = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ ihr Maximum an?

Lösung.

Die Funktion $f(x,y,z) = xyz$ ist stetig und nimmt daher auf einem abgeschossenen und beschränkten Bereich ihr Maximum (sowie auch ihr Minimum) an. Das Maximum wird entweder in einem inneren Punkt der Kugel, d.h. in einem Punkt $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ mit $x^2+y^2+z^2 < 1$, oder in einem Punkt am Rande der Kugel, d.h. an einem Punkt $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ mit $x^2+y^2+z^2 = 1$, angenommen. Falls das Maximum in einem inneren Punkt der Kugel angenommen wird, so ist dieser Punkt auch ein lokales Maximum der Funktion f. Wir untersuchen zuerst also die lokalen Maxima von f. Dafür werden die kritischen Punkte bestimmt in dem der Gradient von f gleich Null gesetzt wird.

$$f_x(x, y, z) = yz = 0 \text{ und } f_y(x, y, z) = xz = 0 \text{ und } f_z(x, y, z) = xy = 0\,,$$

oder äquivalent

$$(y = 0 \lor z = 0) \land (x = 0 \lor z = 0) \land (x = 0 \lor y = 0)\,,$$

und weiterhin äquivalent zu

$$(y = 0 \land x = 0) \lor (y = 0 \land z = 0) \lor (z = 0 \land x = 0).$$

Die Bedingung $(y = 0 \land x = 0)$ wird nur von den Punkten der z-Achse erfüllt, die Bedingung $(y = 0 \land z = 0)$ wird nur von den Punkten der y-Achse erfüllt, und die Bedingung $(z = 0 \land x = 0)$ wird nur von den Punkten der y-Achse erfüllt. Also sind die kritischen Punkte, alle Punkte die auf den Achsen des Koordinatensystems liegen. Die Menge K der kritischen Punkte ist also folgendermaßen gegeben:

$$K = \{(a, 0, 0)\colon a \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, a, 0)\colon a \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, 0, a)\colon a \in \mathbb{R}\}$$

Nun untersuchen wir ob unter den kritischen Punkten lokale Extrema (Maxima) gibt. Dazu berechnen wir die Hesse-Matrix $H_f(x, y, z)$:

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y, z) & f_{xy}(x, y, z) & f_{xz}(x, y, z) \\ f_{yx}(x, y, z) & f_{yy}(x, y, z) & f_{yz}(x, y, z) \\ f_{zx}(x, y, z) & f_{zy}(x, y, z) & f_{zz}(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$$

Es ist leicht festzustellen, dass $detH_f(x, y, z) = 0\ \forall (x, y, z) \in K$. Also gibt die Definitheit von $H_f(x, y, z)$ keinen Aufschluss ber den Status der kritischen Punkte als lokale Extrema. Wir zeigen, dass unter den kritischen Punkten keine lokalen Extrema gibt, in dem wir für jeden kritischen Punkt $(x_0, y_0, z_0) \in K$ folgende Eigenschaft nachweisen: In jeder Umgebung von (x_0, y_0, z_0) gibt es mindestens einen Punkt (x_1, y_1, z_1) mit $f(x_1, y_1, z_1) < f(x_0, y_0, z_0)$ und mindestens einen Punkt (x_2, y_2, z_2) mit $f(x_2, y_2, z_2) > f(x_0, y_0, z_0)$. In der Tat zeigen wir diese Behauptung fr den kritischen Punkt $(0, 0, 0)$ und einen kritischen Punkt der Form $(a, 0, 0)$, $a \neq 0$. Die anderen kritischen Punkte $(0, a, 0)$ und $(0, 0, a)$, $a \neq 0$, können analog behandelt werden.

Ad Punkt $(0, 0, 0)$: $\forall \epsilon > 0$ gilt $f(\epsilon, \epsilon, \epsilon) = \epsilon^3 > 0$, $d\big((\epsilon, \epsilon, \epsilon), (0, 0, 0)\big) = \sqrt{3}\epsilon$ und $f(-\epsilon, \epsilon, \epsilon) = -\epsilon^3 < 0$, $d\big((-\epsilon, \epsilon, \epsilon), (0, 0, 0)\big) = \sqrt{3}\epsilon$.

Ad Punkt $(a, 0, 0)$, $a \neq 0$: Wir betrachten den Fall $a > 0$; der Fall $a < 0$ kann analog behandelt werden. $\forall \epsilon > 0$ gilt $f(a, \epsilon, \epsilon) = a\epsilon^2 > 0$, $d\big((a, \epsilon, \epsilon), (a, 0, 0)\big) = \sqrt{2}\epsilon$ und $f(a, -\epsilon, \epsilon) = -a\epsilon^2 < 0$, $d\big((a, -\epsilon, \epsilon), (a, 0, 0)\big) = \sqrt{2}\epsilon$.

Nun ist kein kritischer Punkt ein Extremum und das Maximum der Funktion f auf der Kugel $\{(x, y, z)\colon x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ wird auf dem Rand $\{(x, y, z)\colon x^2+y^2+z^2 = 1\}$ angenommen. Wir beobachten, dass f schief-symmetrisch bzgl. jeder Koordinate ist, d.h. $f(-x, y, z) = -f(x, y, z)$, $f(x, -y, z) = -f(x, y, z)$ und $f(x, y, -z) = -f(x, y, z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$. Weiters gilt $signum(f(x, y, z)) = signum(x) \cdot signum(y) \cdot signum(z)$ und es reicht daher, die Maximuma von $f(x, y, z)$ für (x, y, z) mit $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ zu bestimmen. Falls (x_0, y_0, y_0) eine Maximalstelle von f auf $\{(x, y, z)\colon x > 0, y > 0, z > 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ist, so sind auch $(-x_0, -y_0, z_0)$, $(x_0, -y_0, -z_0)$ und $(-x_0, y_0, -z_0)$ Maximalstellen von f auf $\{(x, y, z)\colon x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Wir bestimmen nun die Maximalstellen von $f(x,y,z) = xyz$ auf $\{(x,y,z)\colon x>0, y>0, z>0, x^2+y^2+z^2=1\}$, was äquivalent zur Bestimmung der Maximalstellen von $F(x,y) = xy\sqrt{1-x^2-y^2}$ auf $\{(x,y)\colon x>0, y>0, x^2+y^2<1\}$ ist. Dazu bestimmen wir zuerst die lokalen Maxima von $F(x,y)$ auf $\{(x,y)\colon x>0, y>0, x^2+y^2<1\}$. Dann vergleichen wir die Werte dieser lokalen Maxima um das gesuchte Maximum und die entsprechenden Maximalstellen zu bestimmen.

Es gilt

$$F_x(x,y) = y\sqrt{1-x^2-y^2} + xy\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} = y\frac{1-2x^2-y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$F_y(x,y) = x\sqrt{1-x^2-y^2} + xy\frac{-2y}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} = x\frac{1-2y^2-x^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

Bestimmung der kritischen Punkte von F auf $\{(x,y)\colon x>0, y>0, x^2+y^2<1\}$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} F_x(x,y) & = & 0 \\ F_y(x,y) & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 1-2x^2-y^2 & = & 0 \\ 1-2y^2-x^2 & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y^2 & = & 1-2x^2 \\ 1-2(1-2x^2)-x^2 & = & 0 \end{array}\right.$$

Die zweite Gleichung des letzten Gleichungssystems impliziert $x^2 = 1/3$ und somit $x = 1/\sqrt{3}$. Eingesetzt in der ersten Gleichung ergibt das $y = 1/\sqrt{3}$.

Nun berechnen wir die Hesse-Matrix von $F(x,y)$:

$$F_{xx}(x,y) = xy\frac{2x^2+3y^2-3}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} \qquad F_{yy}(x,y) = xy\frac{2y^2+3x^2-3}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} \text{ und}$$

$$F_{xy}(x,y) = \frac{1-3y^2-3x^2+2x^4+2y^4+3x^2y^2}{(1-x^2-y^2)^(3/2)}\,.$$

Es gilt daher

$$F_{xx}(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3}) = -4/\sqrt{3} = F_{yy}(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3}) \text{ und } F_{xy} = -2/(\sqrt{3})\,,$$

und

$$H_F(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} -4/\sqrt{3} & -2/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{3} & -4/\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ mit } det\Big(H_F(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})\Big) = 4 > 0.$$

$H_F(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$ ist also negativ-definit und $(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$ ist somit eine Maximalstelle von F. Die dazugehörige Maximalstelle von f ist $(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},\sqrt{1-1/3-1/3}) = (1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$ und das Maximum ist $f(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3}) = \frac{1}{3\sqrt{3}}$. Nun sind dann auch die Punkte $(-1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$, $(-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3})$ und $(1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3})$ Maximalstellen von f (alle mit dem gleichen Funktionswert von $\frac{1}{3\sqrt{3}}$).

Zusammenfassung:
Es gibt vier Maximalstellen von f auf der Kugel $\{(x,y,z)\colon x^2+y^2+z^2 \le 1\}$ und die sind $(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$, $(-1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$, $(-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3})$, $(1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3})$. Der Wert des Maximums ist $\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

4. Bestimmen Sie die Extrema von $f(x,y) = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ inkl. Typ und Funktionswert unter der Nebenbedingung $x^2+y^2=1$.

   Lösung.

   Die Funktion f ist für $x \neq 0$ und $y \neq 0$ definiert und somit in den Punkten $(1,0)$,$(-1,0)$, $(0,1)$ und $(0,-1)$ des Kreises $x^2+y^2=1$ nicht definiert. Wir lösen die Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$ nach y auf und unterscheiden zwei Fälle, je nach Vorzeichen von y.

Fall I: $y = \sqrt{1-x^2}$, d.h., $y > 0$. Durch Einsetzen in f erhalten wir die neue Funktion $F(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ mit Definitionsbereich $(-1,0) \cup (0,1)$.

Fall II: $y = -\sqrt{1-x^2}$, d.h., $y < 0$. Durch Einsetzen in f erhalten wir die neue Funktion $G(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ebenfalls mit Definitionsbereich $(-1,0) \cup (0,1)$.

Es gilt nun für die Funktionen F und G die lokalen und globalen Extrema in den jeweiligen Definitionsbereichen zu suchen und daraus die lokalen und globalen Extrema der Funktion f abzuleiten. Es sei angemerkt, dass die globalen Minima und Maxima von F und G (und somit auch jene von f) nicht unbegingt angenommen werden, da der Definitionsbereich der Funktionen F und G eine offene Menge ist.

Fall I: Bestimmung der Extrema von Funktion F. Zuerst bestimmen wir die kritischen Punkte durch Nullsetzung der ersten Ableitung von F:

$$F'(x) = \frac{x}{1-x^{2^{3/2}}} - \frac{1}{x^2} = 0 \Longrightarrow x^3 = (1-x^2)^{3/2} \Longrightarrow x = \sqrt{1-x^2} > 0$$

und somit

$$x^2 = 1 - x^2 \Longrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Wir überprüfen anhand der zweiten Ableitung $F''(\frac{1}{\sqrt{2}})$ ob $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ein Extremum ist und bestimmen ggf. seinen Typus:

$$F''(x) = \frac{(1-x^2)^{3/2} - x\frac{3}{2}(1-x^2)^{1/2}(-2x)}{(1-x^2)^3} - \frac{-2x}{x^4} = \frac{(1-x^2)^{1/2}((1-x^2)+3x^3)}{(1-x^2)^3} + \frac{2}{x^3} =$$

$$\frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{5/2}} + \frac{2}{x^3}$$

Durch Einsetzen erhalten wir $F''\big(\frac{1}{\sqrt{2}}\big) = 12\sqrt{2} > 0$ und somit ist $\frac{1}{\sqrt{2}}$ eine lokale Minimalstelle von F. Die dazugehörige lokale Minimalstelle von f ist $\big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\big)$ mit $f\big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\big) = 2\sqrt{2}$.

Fall II: Bestimmung der Extrema von Funktion G. Zuerst bestimmen wir die kritischen Punkte durch Nullsetzung der ersten Ableitung von G:

$$G'(x) = -\frac{x}{1-x^{2^{3/2}}} - \frac{1}{x^2} = 0 \Longrightarrow x^3 = -(1-x^2)^{3/2} \Longrightarrow x = -\sqrt{1-x^2} < 0$$

und somit

$$x^2 = 1 - x^2 \Longrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Wir überprüfen anhand der zweiten Ableitung $G''(-\frac{1}{\sqrt{2}})$ ob $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ein Extremum ist und bestimmen ggf. seinen Typus:

$$G''(x) = \frac{-(1-x^2)^{3/2} + x\frac{3}{2}(1-x^2)^{1/2}(-2x)}{(1-x^2)^3} - \frac{-2x}{x^4} = \frac{-(1-x^2)^{1/2}((1-x^2)+3x^3)}{(1-x^2)^3} + \frac{2}{x^3} =$$

$$-\frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{5/2}} + \frac{2}{x^3}$$

Durch Einsetzen erhalten wir $G''\big(-\frac{1}{\sqrt{2}}\big) = -12\sqrt{2} < 0$ und somit ist $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ eine lokale Maximalstelle von G. Die dazugehörige lokale Maximalstelle von f ist $\big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\big)$ mit $f\big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\big) = -2\sqrt{2}$.
Somit haben wir die lokalen Extrema von F bestimmt: $\big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\big)$ ist ein lokales Minimum mit Funktionswert $f\big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\big) = 2\sqrt{2}$ und $\big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\big)$ ist ein lokales Maximum mit Funktionswert $f\big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\big) = -2\sqrt{2}$.

Nun beschäftigen wir uns mit den globalen Extrema. Wir beobachten, dass der Funktionswert $f\big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\big) = -2\sqrt{2}$ des lokalen Maximums kleiner als der Funktionswert $f\big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\big) = 2\sqrt{2}$ des lokalen Minimums ist. Somit sind diese lokalen Extrema keine globalen Extrema. Es stellt sich nun die Frage ob die globalen Extrema der Funktion f auf dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$ existieren. Wir beobachten, dass $\lim_{(x,y)\to(1,0^+)} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = +\infty$ und $\lim_{(x,y)\to(1,0^-)} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = -\infty$ und daraus folgt, dass die globalen Extrema von $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ auf $x^2 + y^2 = 1$ nicht existieren.