Tutorium Mathematik II M WM VT

SS 2011

25 März 2011 - Lösungen

2. Entwickeln Sie die Funktion f mit

$$f(x,y) = x^2 \sin \frac{xy}{2}$$

nach Potenzen von $(x-1)$ und $(y-\pi)$ bis zu Gliedern zweiter Ordnung (einschließlich).

Lösung.

Da eine Reihenentwicklung nach Potenzen von $x-1$ und $y-\pi$ gesucht ist, ist $(x_0, y_0) = (1, \pi)$ als Entwicklungspunkt zu wählen. Da die Entwicklung bis zu Gliedern einschließlich zweiter Ordnung gefragt ist, müssen zunächst alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung bestimmt werden.

Die Taylorformel zweiter Ordnung hat folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} f(x,y) \quad \approx \quad & f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_{0)}\cdot(y-y_0) \\ & + \frac{1}{2} f_{xx}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2 + f_{xy}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)(y-y_0) + \frac{1}{2} f_{yy}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)^2 \,. \end{aligned}$$

Für

$$f(x,y) := x^2 \sin \frac{xy}{2}$$

erhält man die folgenden partiellen Ableitungen:

$$f_x(x,y) = 2x \sin \frac{xy}{2} + \frac{1}{2} x^2 y \cos \frac{xy}{2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{1}{2} x^3 \cos \frac{xy}{2}$$

$$f_{xx}(x,y) = 2 \sin \frac{xy}{2} + 2xy \cos \frac{xy}{2} - \frac{1}{4} x^2 y^2 \sin \frac{xy}{2}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{3}{2} x^2 \cos \frac{xy}{2} - \frac{1}{4} x^3 y \sin \frac{xy}{2}$$

$$f_{yy} = -\frac{1}{4} x^4 \sin \frac{xy}{2}$$

Auswertung an der Stelle $x = x_0 = 1$ und $y = y_0 = \pi$ liefert $f(1,\pi) = 1$, $f_x(1,\pi) = 2$, $f_y(1,\pi) = 0$, $f_{xx}(1,\pi) = 2 - \frac{\pi^2}{4}$, $f_{xy} = -\frac{\pi}{4}$ und $f_{yy}(1,\pi) = -\frac{1}{4}$.

Einsetzen in die obige Taylorformel liefert:

$$f(x,y) \approx 1 + 2(x-1) + \left(1 - \frac{\pi^2}{16}\right)(x-1)^2 - \frac{\pi}{4}(x-\pi)(y-\pi) - \frac{1}{8}(y-\pi)^2.$$

3. Gegeben sei die Funktion $f(x, y, z) = x^2 + y + xz$. Für welchen Punkt (x_0, y_o, z_0) auf der Fläche $f(x, y, z) = 0$ liegt die Tangentialebene parallel zur Ebene

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 2x + 9y + 3z = 5\}\,?$$

Lösung. Zuerst schreiben wir die Gleichung der Fläche $f(x, y, z) = 0$ als explizite Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf: $y = g(x, z) = -x^2 - xz$. Die Gleichung der Tangentialebene an einem Punkt $(x_0, y_0 = g(x_0, z_0), z_0)$ dieser Fläche hat folgende Gestalt: $y = y_0 + g_x(x_0, z_0)(x - x_0) + g_z(x_0, z_0)(z - z_0)$.

Die Ableitungen der Funktion g sind forgendermaßen gegeben: $g_x = -2x - z$, $g_z = -x$. Somit gilt $g_x(x_0, z_0) = -2x_0 - z_0$, $g_z(x_0, z_0) = -x_0$. Eingesetzt in der Gleichung der Tangentialebene erhalten wir:

$y = y_0 + (-2x_0 - z_0)(x - x_0) - x_0(z - z_0)$ oder, äquivalent $y + (2x_0 + z_0)(x - x_0) + x_0(z - z_0) - y_0 = 0$

Der Normalvektor zur Tangentialebene ist also $(2x_0 + z_0, 1, x_0)$ und wenn die Ebene E parallel zur Tangentialebene sein soll, so müssen die jeweiligen Normalvektoren kollinear sein. Dh.es existiert ein $\lambda \neq 0$ sodass

$$\begin{pmatrix} 2x_0 + z_0 \\ 1 \\ x_0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

wobei $(2, 9, 3)^T$ der Normalvektor zur Ebene E ist.

Die letzte Gleichung impliziert $1 = 9\lambda$ und somit $\lambda = \frac{1}{9}$. Weiters gilt $x_0 = 3\lambda = \frac{1}{3}$ und $z_0 = 2\lambda - 2x_0 = 2\frac{1}{9} - \frac{2}{3}) = -\frac{4}{9}$.

Also im Punkt $(+\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{4}{9})$ ist die Tangentialebene der gegebenen Kurve parallel zur gegebenen Ebene E.