Aufgabe 24.23 •• Für die ersten partiellen Ableitungen erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x \cdot (x^2 - y^2 - 2) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = y \cdot (2 + x^2 - y^2) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

Nullsetzen liefert im ersten Fall $x = 0$ oder $x^2 - y^2 - 2 = 0$, im zweiten $y = 0$ oder $x^2 - y^2 + 2 = 0$. Ein kritischer Punkt ist damit auf jeden Fall $\boldsymbol{p}_1 = (0,\ 0)^\top$. Die Bedingungen $x = 0$ und $2 - y^2 = 0$ führen auf $\boldsymbol{p}_2 = (0,\ \sqrt{2})^\top$, $\boldsymbol{p}_3 = (0,\ -\sqrt{2})^\top$. Für $y = 0$ und $x^2 - 2 = 0$ erhält man $\boldsymbol{p}_4 = (\sqrt{2},\ 0)^\top$, $\boldsymbol{p}_5 = (-\sqrt{2},\ 0)^\top$. Die beiden Bedingungen $x^2 - y^2 - 2 = 0$ und $x^2 - y^2 + 2 = 0$ sind nicht gleichzeitig erfüllbar, man hat also bereits alle kritischen Punkte gefunden. Überprüfen der zweiten Ableitungen liefert:

$$\begin{aligned}
&(f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2)\big|_{(0,0)} = (-2) \cdot 2 - 0 = -4 < 0 \\
&\boldsymbol{p}_1 \text{ Sattelpkt.} \\
&(f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2)\big|_{(0,\sqrt{2})} = (-\tfrac{4}{e}) \cdot (-\tfrac{4}{e}) - 0 = \tfrac{16}{\mathrm{e}^2} > 0 \\
&\qquad f_{xx} = -\tfrac{4}{\mathrm{e}} < 0,\ \boldsymbol{p}_2 \text{ lok. Max.} \\
&(f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2)\big|_{(0,\sqrt{2})} = (-\tfrac{4}{e}) \cdot (-\tfrac{4}{e}) - 0 = \tfrac{16}{\mathrm{e}^2} > 0 \\
&\qquad f_{xx} = -\tfrac{4}{\mathrm{e}} < 0,\ \boldsymbol{p}_3 \text{ lok. Max.} \\
&(f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2)\big|_{(\sqrt{2},0)} = \tfrac{4}{e} \cdot \tfrac{4}{e} - 0 = \tfrac{16}{\mathrm{e}^2} > 0 \\
&\qquad f_{xx} = \tfrac{4}{\mathrm{e}} > 0,\ \boldsymbol{p}_4 \text{ lok. Min.} \\
&(f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2)\big|_{(-\sqrt{2},0)} = \tfrac{4}{e} \cdot \tfrac{4}{e} - 0 = \tfrac{16}{\mathrm{e}^2} > 0 \\
&\qquad f_{xx} = \tfrac{4}{\mathrm{e}} > 0,\ \boldsymbol{p}_5 \text{ lok. Min.}
\end{aligned}$$