

Tutorium Mathematik II M WM VT

SS 2011

20. Mai 2011 - Lösung von Beispiel 3

3. Berechnen Sie (unter Angabe aller Zwischenschritte) Krümmung und Torsion für die folgende Kurve im \mathbb{R}^3 :

$$x(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos t), \quad y(t) = \frac{1}{2} \sin t, \quad z(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos t).$$

Ferner sollen jene Werte des Parameters t bestimmt werden für die die Krümmung ein Maximum bzw. ein Minimum annimmt.

Lösung.

Die Krümmung κ bzw. die Torsion τ sind durch folgende Formeln gegeben:

$$\kappa = \frac{\sqrt{\|\dot{\vec{x}}\|^2 \|\ddot{\vec{x}}\|^2 - \langle \dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}} \rangle^2}}{\|\dot{\vec{x}}\|^3} \quad (1)$$

$$\tau = \frac{(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}})}{\|\dot{\vec{x}}\|^2 \|\ddot{\vec{x}}\|^2 - \langle \dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}} \rangle^2}, \quad (2)$$

wobei $\dot{\vec{x}}$, $\ddot{\vec{x}}$, und $\dddot{\vec{x}}$ die Vektoren der 1., 2., bzw. 3. Ableitungen nach dem Kurvenparameter t sind, und $(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}})$ das Spatprodukt der Vektoren $\dot{\vec{x}}$, $\ddot{\vec{x}}$, $\dddot{\vec{x}}$ bezeichnet. Die Vektoren der Ableitungen sind folgendermaßen gegeben:

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \sin t \\ \frac{1}{2} \cos t \\ \frac{1}{2} \sin t \end{pmatrix} \quad \ddot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cos t \\ -\frac{1}{2} \sin t \\ \frac{1}{2} \cos t \end{pmatrix} \quad \dddot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sin t \\ -\frac{1}{2} \cos t \\ -\frac{1}{2} \sin t \end{pmatrix}$$

Man erhält nun für $\|\dot{\vec{x}}\|$, $\|\ddot{\vec{x}}\|$, $\langle \dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}} \rangle$ und $(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}})$ folgende Beziehungen:

$$\|\dot{\vec{x}}\| = \sqrt{\frac{1}{4} \sin^2 t + \frac{1}{4} \cos^2 t + \frac{1}{4} \sin^2 t} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sin^2 t} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin^2 t}$$

$$\|\ddot{\vec{x}}\| = \sqrt{\frac{1}{4} \cos^2 t + \frac{1}{4} \sin^2 t + \frac{1}{4} \cos^2 t} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos^2 t} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \cos^2 t}$$

$$\langle \dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}} \rangle = \frac{1}{4} \sin t \cos t - \frac{1}{4} \sin t \cos t + \frac{1}{4} \sin t \cos t = \frac{1}{4} \sin t \cos t$$

$$(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}}) = \det \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} \sin t & \frac{1}{2} \cos t & \frac{1}{2} \sin t \\ -\frac{1}{2} \cos t & -\frac{1}{2} \sin t & \frac{1}{2} \cos t \\ \frac{1}{2} \sin t & -\frac{1}{2} \cos t & -\frac{1}{2} \sin t \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

Die Determinante in (3) ist gleich 0 weil die 1. und die 3. Zeile der Matrix linear abhängig sind (die 3. Zeile erhält man aus der 1. Zeile durch eine Multiplikation mit -1).

Durch Einsetzen in (1) bzw. (2) erhält man:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\sqrt{\frac{1}{16}(1 + \sin^2 t)(1 + \cos^2 t) - \frac{1}{16} \sin^2 t \cos^2 t}}{\frac{1}{8}(1 + \sin^2 t)^{3/2}} \\ &= \frac{8}{(1 + \sin^2 t)\sqrt{1 + \sin^2 t}} \sqrt{\frac{1 + \sin^2 t \cos^2 t + \sin^2 t + \cos^2 t - \sin^2 t \cos^2 t}{16}} \\ &= \frac{8}{(1 + \sin^2 t)\sqrt{1 + \sin^2 t}} \sqrt{\frac{1 + \sin^2 t + \cos^2 t}{16}} = \frac{8}{(1 + \sin^2 t)\sqrt{1 + \sin^2 t}} \sqrt{\frac{2}{16}} \\ &= \frac{8}{(1 + \sin^2 t)\sqrt{1 + \sin^2 t}\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{8}}{(1 + \sin^2 t)^{3/2}} \end{aligned}$$

sowie $\tau = 0$.

Weiters sollen die Werte des Parameters t bestimmt werden, für die die Krümmung ein Maximum bzw. eine Minimum annimmt. Zu diesem Zweck berechnen wir die 1. Ableitung der Krümmung und setzen diese Null:

$$\kappa' = -\sqrt{8} \frac{\frac{3}{2}(1 + \sin^2 t)^{1/2} 2 \sin t \cos t}{(1 + \sin^2 t)^3} = -\sqrt{8} \frac{3 \sin t \cos t}{(1 + \sin^2 t)^{5/2}}.$$

Aus $\kappa' = 0$ folgt $\sin t \cos t = 0$. Die Nullstellen der sin-Funktion sind $x_k = k\pi$ und die Nullstellen der cos-Funktion sind $y_k = k\pi + \frac{\pi}{2}$, wobei k eine ganze Zahl ist. Um zu bestimmen ob x_k , y_k , für $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, Extrema sind, berechnen wir den

Wert der 2. Ableitung κ'' für x_k und für y_k :

$$\begin{aligned}
\kappa'' &= -3\sqrt{8} \frac{(\sin t \cos t)'(1 + \sin^2 t)^{5/2} - (\sin t \cos t) \left((1 + \sin^2 t)^{5/2} \right)'}{(1 + \sin^2 t)^5} \\
&= -3\sqrt{8} \frac{(\cos^2 t - \sin^2 t)(1 + \sin^2 t)^{5/2} - \frac{5}{2} \sin t \cos t (1 + \sin^2 t)^{3/2} (2 \sin t \cos t)}{(1 + \sin^2 t)^5} \\
&= -3\sqrt{8} \frac{(\cos^2 t - \sin^2 t)(1 + \sin^2 t)^{5/2} - 5 \sin^2 t \cos^2 t (1 + \sin^2 t)^{3/2}}{(1 + \sin^2 t)^5} \\
&= -3\sqrt{8} \frac{(\cos^2 t - \sin^2 t)(1 + \sin^2 t) - 5 \sin^2 t \cos^2 t}{(1 + \sin^2 t)^{7/2}} \\
&= -3\sqrt{8} \frac{\cos^2 t - \sin^2 t + \cos^2 \sin^2 t - \sin^4 t - 5 \sin^2 t \cos^2 t}{(1 + \sin^2 t)^{7/2}} \\
&= -\frac{3\sqrt{8}}{(1 + \sin^2 t)^{7/2}} (\cos^2 t - \sin^2 t - \sin^4 t - 4 \sin^2 t \cos^2 t)
\end{aligned}$$

Setzt man $t = x_k$ bzw. $t = y_k$ ein, so erhält man:

$$\kappa''(x_k) = -3\sqrt{8} \cos^2 k\pi = -3\sqrt{8} < 0 \quad (4)$$

$$\kappa''(y_k) = -\frac{3\sqrt{8}}{(1 + 1)^{7/2}} \left(-\sin^2(k\pi + \frac{\pi}{2}) - \sin^4(k\pi + \frac{\pi}{2}) \right) = \frac{2 \cdot 3\sqrt{8}}{2^3 \sqrt{2}} = \frac{3}{2} > 0 \quad (5)$$

Aus (4) folgt, daß bei x_k ein lokales Maximum vorliegt, für alle ganze Zahlen k , und aus (5) folgt, daß bei y_k ein lokales Minimum vorliegt, für alle ganze Zahlen k .