Tutorium Mathematik II M WM VT SS 2009

Lösungen der Übungsbeispiele 2 und 4

4. März 2011

Bsp. 2. Gegeben sei eine Abbildung $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\phi(v) = Av + u$ wobei $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ ein gegebener Vektor in $\mathbb{R}^3$ ist und A folgendermaßen gegeben ist:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & t & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{für ein Parameter } t \in \mathbb{R}.$$

Für welche Werte von t, u_1, u_2, u_3 ist ϕ eine lineare Abbidlung? Für welche Werte von t, u_1, u_2, u_3 ist ϕ injektiv, surjektiv, bijektiv? Bestimmen Sie die Dimensionen von Kern und Bild von ϕ in Abhängigkeit von t und u.

Lösung:

Linearität: Fall ϕ linear dann muss $0 = \phi(0) = A0 + u = u$, also $u = 0$, d.h. $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ gelten. Falls $u = 0$ dann ist ϕ als $\phi(v) = Av$ gegeben und ist somit additiv und homogen für alle reellen Werte von t :

$$\phi(v_1 + v_2) = A(v_1 + v_2) = av_1 + Av_2 = \phi(v_1) + \phi(v_2),\ \forall v_1, v_3 \in \mathbb{R}^3$$

$$\phi(\lambda v_1) = A(\lambda v_1) = \lambda A v_1 = \lambda \phi(v_1),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v_1 \in \mathbb{R}^3.$$

Also ϕ ist linear genau dann, wenn $u = 0 \in \mathbb{R}^3$ und $t \in \mathbb{R}$ beliebig.

Injetivität, Surjektivität, Bijektivität:

Fall (i): $u = 0$.

$\phi(v) = Av$ ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3$ auf $\mathbb{R}^3$. Fr̈ eine solche Abbildung sind Injektivität, Surjektivität und Bijektivität äquivalent und ϕ ist genau dann injektiv (surjektiv,bijektiv), wenn $Ker(\phi) = \{0\}$. Wir bestimmen nur $Ker(\phi)$ und lösen dafür das homogene lineare Gleichungssystem $Av = 0$. Wir transformieren A in Zeilennormalform:

$$\begin{pmatrix} 4 & t & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & t & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & t-8 & 2 \end{pmatrix}$$

Für $t = 8$ erkennen wir bei der letzten Matrix, dass sie vollen Rang hat und das homogene lineare Gleichungssystem besitzt somit nur die 0-Lösung. Daraus folgt $Ker(\phi) = \{0\}$ und ϕ injektiv (surjektiv, bijektiv).

Für $t \neq 8$ transfomieren wir die Matrix weiter:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 + (t-8) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & t-6 \end{pmatrix}$$

Für $t \neq 6$ hat die letzte Matrix vollen Rang und das homogene lineare Gleichungssystem besitzt somit nur die 0-Lösung. Daraus folgt $Ker(\phi) = \{0\}$ und ϕ injektiv (surjektiv, bijektiv).

Für $t = 6$ ist der Rang der letzten Matrix gleich 2 und das homogene lineare Gleichungssystem besitzt unendlich viele Lösungen der Form $\{s(-5, 3, 1)^T : s \in \mathbb{R}\}$. Es gilt also $Ker(\phi) = \{s(-5, 3, 1)^T : s \in \mathbb{R}\} \neq \{0\}$ und ϕ ist daher nicht injektiv (surjektiv,bijektiv).

Fall (ii): $u \neq 0$. Sei $\phi_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v \mapsto Av$. ϕ ist genau dann injektiv (surjektiv, bijektiv) wenn ϕ_1 injektiv (surjektiv, bijektiv). Es folgt also aus Fall (i), dass ϕ injektiv (surjektiv, bijektiv) genau dann ist, wenn $t \neq 6$.

Dimensionen von Kern und Bild:

Fall (i): $u = 0$.

Für $t \neq 6$ gilt $Ker(\phi) = \{0\}$ (siehe oben) und somit $dim(Ker(\phi)) = 0$ und $dim(Im(\phi)) = 3 - dim(Ker(\phi)) = 3$.

Für $t = 6$ gilt $Ker(\phi) = \{s(-5, 3, 1)^T : s \in \mathbb{R}\}$ (siehe oben) und somit $dim(Ker(\phi)) = 1$ und $dim(Im(\phi)) = 3 - dim(Ker(\phi)) = 2$.

Fall (ii): $u \neq 0$.

$Ker(\phi) = \{v \in \mathbb{R}^3 : Av + u = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^3 : Av = -u\}$. Sei $v_0 \in \mathbb{R}^3$ ein Vektor aus $Ker(\phi)$. Es gilt dann $Ker(\phi) = Ker(\phi_1) + v_0$ wobei ϕ_1 die oben definierte lineare Abbildung ist und die Summe in der letzten Gleichung als $\{v' + v_0 : v' \in Ker(\phi_1)\}$ zu verstehen ist. D.h. $Ker(\phi)$ ist in diesem Fall ein affiner Raum dessen zugrundeliegender Vektorraum $Ker(\phi_1)$ ist. Daher gilt $dim(Ker(\phi)) = \dim(Ker(\phi_1))$ und somit: $dim(Ker(\phi)) = 0$ für $t \neq 6$ und $dim(Ker(\phi)) = 1$ für $t = 6$.

Analog gilt $Im(\phi) = \{Av + u : v \in \mathbb{R}^3\} = \{Av : v \in \mathbb{R}^3\} + u = Im(\phi_1) + u$ und daher $dim(Im(\phi)) = dim(Im(\phi_1))$ was zusammen mit dem Ergebnis von Fall (i) folgendes impliziert: $dim(Im(\phi)) = 3$ falls $t \neq 6$ und $dim(Im(\phi)) = 2$ falls $t = 6$.

Bsp. 4. Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ versehen mit dem üblichen kartesischen Koordinatensystem. Sei ϕ jene Abbildung in $\mathbb{R}^3$, die jedem Punkt $v \in \mathbb{R}^3$ einen Punkt $\phi(v)$ zuordnet, sodass v und $\phi 8v)$ bzgl. der Ebene $2x + z = y$ symmetrisch sind.

(a) Sei $v = (v_1, v_2, v_3)^T \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Geben Sie $\phi(v)$ explizit an. Ist ϕ eine lineare Abbildung?

(b) Bestimmen Sie die Dimensionen von Kern und Bild der Abbildung ϕ. Ist ϕ bijektiv?

Lösung:

(a) Sei (v_1, v_2, v_3) ein Punkt P in $\mathbb{R}^3$. Wir bestimmen zunächst wo dieser Punkt durch die gegebene Spiegelung abgebildet wird. Sei n der Normalvektor zur Ebene $2x + z = y$: $n = (2, -1, 1)^T$. Die Gleichung der Geraden g, die durch den Punkt P parallel zur n verläuft, ist gegeben als $(v_1, v_2, v_3)^t + t(n_1, n_2, n_3)^T = (v_1 + 2t, v_2 - t, v_3 + t)^T$, $t \in \mathbb{R}$. Die Koordinaten des Schnittpunktes S dieser Geraden mit der gegebenen Ebene lassen sich durch Einsetzten der Koordinaten der Punkte aus der Geraden in der Gleichung der Ebene:

$$2(v_1 + 2t) + v_3 + t = v_2 - t \Longrightarrow t = (v_2 - v_3 - 2v_1)/6$$

Die Koordinaten des Vektors $\vec{PS}$ sind somit $\frac{v_2 - v_3 - 2v_1}{6}(2, -1, 1)^T$. Sei P' das Spiegelbild von P. P' liegt auf der Geraden g und is symmetrisch zu P bzgl. S. Somit sind die Koordinaten von P' als $(v_1, v_2, v_3)^T + 2\frac{v_2 - v_3 - 2v_1}{6}(2, -1, 1)^T$. Da die Ebene $2x + z = y$ durch den Ursprung verläuft wird der Ursprung durch die untersuchte Spiegelung auf sich selbst gebildet. Somit wird ein Vektor v mit Koordinaten v_1, v_2, v_3 auf einen Vektor mit Koordinaten $(v_1, v_2, v_3)^T + 2\frac{v_2 - v_3 - 2v_1}{6}(2, -1, 1)^T = \frac{1}{3}(-v_1 + 2v_2 - 2v_3, 2v_1 + 2v_2 + v_3, -2v_1 + v_2 + 2v_3)^T = Av$ wobei

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Die Spiegelung an der Geraden $2x + z = y$ ist also die Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, sodass $\phi(v) = Av$, und ist somit linear.

(b) Ähnlich wie in Beispiel 2 bringen wir die Matrix A in Zeilennormalform:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Die letzte Matrix hat vollen Rang und das homogene lineare Gleichungssystem $Av = 0$ besitzt somit nur die 0-Lösung. Daraus folgt $Ker(\phi) = \{0\}$ und ϕ ist injektiv (surjektiv, bijektiv).