

- Wir betrachten \mathbb{R}^3 versehen mit dem üblichen kartesischen Koordinatensystem. Sei $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Abbildung, die jedem Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ die Projektion $\phi(v)$ von v auf der Koordinatenebene xoy zuordnet. Ist diese Abbildung linear? Geben Sie die Darstellungsmatrix dieser Abbildung bzgl. den Standardbasen in \mathbb{R}^3 bzw. \mathbb{R}^2 . Bestimmen Sie den Kern und das Bild von ϕ sowie deren Dimensionen. Ist ϕ injektiv, bijektiv, surjektiv?
- Gegeben sei eine Abbildung $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\phi(v) = Av + u$ wobei $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ ein gegebener Vektor in \mathbb{R}^3 ist und A folgendermaßen gegeben ist:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & t & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{für ein Parameter } t \in \mathbb{R}.$$

Für welche Werte von t, u_1, u_2, u_3 ist ϕ eine lineare Abbildung? Für welche Werte von t, u_1, u_2, u_3 ist ϕ injektiv, surjektiv, bijektiv? Bestimmen Sie die Dimensionen von Kern und Bild von ϕ in Abhängigkeit von t und u .

- In vielen Anwendungen sind Änderungen des Bezugssystems – das ist ein System, auf das sich die Orts- und Zeitangaben beziehen – nötig. Mathematisch betrachtet ist dies eine Koordinatentransformation, also eine lineare Abbildung.

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix der folgenden Koordinatentransformation von \mathbb{R}^3 bzgl. der Standardbasis: Das neue Koordinatensystem erhält man aus dem alten durch eine Drehung um den Winkel α mit Drehachse e_1 bzw. e_2 bzw. e_3 , wobei e_1, e_2, e_3 die Einheitsvektoren sind, d.h. $e_1 = (1, 0, 0)^T$, $e_2 = (0, 1, 0)^T$ und $e_3 = (0, 0, 1)^T$.

- Wir betrachten \mathbb{R}^3 versehen mit dem üblichen kartesischen Koordinatensystem. Sei ϕ jene Abbildung in \mathbb{R}^3 , die jedem Punkt $v \in \mathbb{R}^3$ den Punkt $\phi(v)$ zuordnet, sodass v und $\phi(v)$ symmetrisch bezüglich der Ebene $2x + z = y$ sind.
 - Sei $v = (v_1, v_2, v_3)^T \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Geben Sie $\phi(v)$ explizit an. Ist ϕ eine lineare Abbildung?
 - Bestimmen Sie die Dimensionen von Kern und Bild der Abbildung ϕ . Ist ϕ bijektiv?