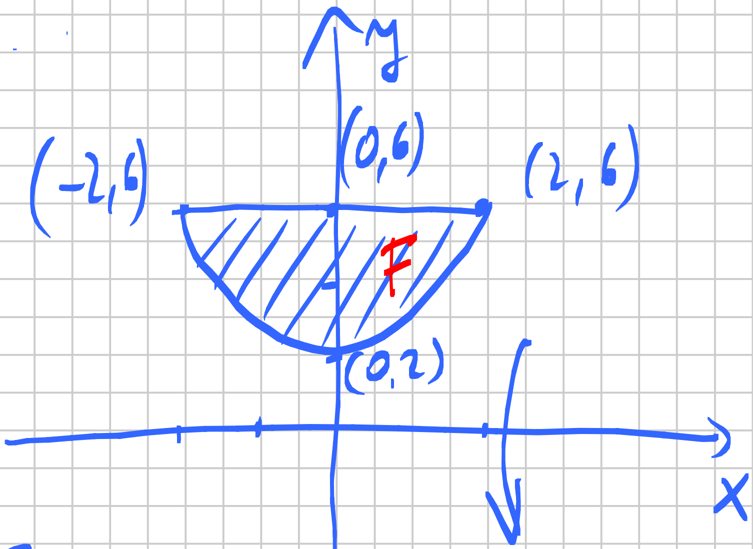
Tut Mathe II M WM VT 1.7.2011 Lösungen

Notiztitel 30.06.2011

Bsp. 1

$y = x^2 + 2$

$y = 6$



Rotation um die x-Achse.

2. Guldin'sche Regel

Volumen = Flächeninhalt · Weg des Massenschwerpkt.

Flächeninhalt: $F = \int_{-2}^{2} \int_{x^2+2}^{6} dy \, dx = \int_{-2}^{2} (6 - x^2 - 2)\, dx$

$F = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx = (4x - x^3/3)\Big|_{-2}^{2} = 16 - \frac{16}{3} = 2 \cdot \frac{16}{3}$

Massenschwerpunkt: (x_s, y_s) (bei konstanter Dichte)

$x_s = 0$ aus Symmetriegründen

$$y_s = \frac{1}{F} \int_{-2}^{2}\int_{x^2+2}^{6} y \, dy \, dx = \frac{1}{F}\int_{-2}^{2} \frac{y^2}{2}\Big|_{x^2+2}^{6} dx = \int_{-2}^{2}\left(18 - \frac{(x^2+2)^2}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{F}\int_{-2}^{2}\left(18 - \frac{x^4+4x^2+4}{2}\right) dx = \frac{1}{F}\int_{-2}^{2}\left(16 - \frac{x^4}{2} - 2x^2\right) dx$$

$$= \frac{1}{F}\left(16x\Big|_{-2}^{2} - \frac{x^5}{10}\Big|_{-2}^{2} - \frac{2x^3}{3}\Big|_{-2}^{2}\right) = \frac{1}{F}\left(64 - \frac{64}{10} - \frac{32}{3}\right) = 4{,}4$$

$$V = F \cdot 2\pi \cdot y_S = \frac{32}{3} \cdot 2\pi \; 4.4 = \frac{704}{15} 2\pi \approx 93.866 \cdot \pi \;//$$

Bsp. 2 Bestimmen Sie die Lösung die durch den Punkt $(1,1)$ verläuft.

$$\underbrace{\frac{y}{x}}_{A(x,y)} dx + \underbrace{\left(y^3 - \ln x\right)}_{B(x,y)} dy = 0$$

Ob es eine exakte DGL vorliegt?

$A_y = \frac{1}{x} \neq B_x = -\frac{1}{x}$ keine exakte DGL

Suche integrierenden Faktor:

$$\frac{B_x - A_y}{A} = \frac{-1/x - 1/x}{y/x} = -\frac{2}{y} \Rightarrow \mu(y) = \exp\left\{ \int \frac{B_x - A_y}{A} dy \right\}$$

$$\mu(y) = \exp\left\{ \int -\frac{2}{y}\, dy \right\} = \exp\left(\ln \frac{1}{y^2} \right) = \frac{1}{y^2} \quad (y \neq 0)$$

Also $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$ ist ein integrierender Faktor

$$\mu(y)\, A(x,y)\, dx + \mu(y)\,(y^3 - \ln x)\, dy = 0$$

$$\frac{1}{y\,x} dx + \frac{1}{y^2}\,(y^3 - \ln x)\, dy = 0$$

$$\left(\frac{1}{yx}\right)'_y = -\frac{1}{x}\,\frac{1}{y^2} = \left(\frac{1}{y^2}\left(y^3 - \ln x\right)\right)'_x = -\frac{1}{x y^2} \quad \checkmark$$

exakte DGL

Lösung $\quad F(x,y) = C \quad$ mit $\quad F_x = \frac{1}{yx} \quad F_y = \frac{1}{y^2}\left(y^3 - \ln x\right)$

$$F_x = \frac{1}{yx} \Rightarrow F = \int \frac{1}{yx}\,dx + \varphi(y) = \frac{1}{y}\ln|x| + \varphi(y)$$

für $\underline{x>0}$ $\quad F = \frac{1}{y}\ln x + \varphi(y)$

$$F'_y = \cancel{-\frac{1}{y^2}\ln x} + \varphi'(y) = \frac{1}{y^2}\cdot y^3 \cancel{- \frac{\ln x}{y^2}}$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = \frac{1}{y^2}\cdot y^3 = y \Rightarrow \varphi(y) = \frac{y^2}{2} + C$$

Allg. Lösung

$$F(x,y) = C$$

$$\frac{1}{y}\ln x + \frac{y^2}{2} = C$$

Spezielle Lösung durch $(1,1)$: $\frac{1}{1}\ln 1 + \frac{1^2}{2} = C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

Also $\boxed{\frac{1}{y}\ln x + \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}}$

Bsp. 3 Extreme von $f(x,y) = 4x + 7y$

udNB $16x^2 + 49y^2 = 784$

a) Einsetzmethode

$$16x^2 + 49y^2 = 784$$

$$\Rightarrow \frac{16x^2}{784} + \frac{49y^2}{784} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$$x^2 = \left(1 - \frac{y^2}{16}\right) 49 = 49 - \frac{49}{16} y^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{49\left(1 - \frac{y^2}{16}\right)}$$

$$x = \pm \frac{7}{4}\sqrt{16 - y^2}$$

Einsetzen $f(x,y) = \pm 7\sqrt{16 - y^2} + 7y$

$$f_1(y) := 7\sqrt{16-y^2} + 7y \qquad f_2(y) := -7\sqrt{16-y^2} + 7y$$

$$f_1'(y) = 7\left(1 + \frac{-\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{16-y^2}}\right) = 7\,\frac{\sqrt{16-y^2} - y}{\sqrt{16-y^2}} = 0$$

$$\sqrt{16-y^2} = y \Rightarrow 16 - y^2 = y^2 \Rightarrow 2y^2 = 16$$

$$y = \pm 2\sqrt{2}$$

$$f_1''(y) = -\frac{\sqrt{16-y^2} - \frac{-\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{16-y^2}}\cdot y}{16-y^2} = -\frac{16-y^2+y^2}{(16-y^2)^{3/2}}$$

$$f_1''(y) = -\frac{16}{(16-y^2)^{3/2}} < 0 \Longrightarrow y = \pm 2\sqrt{2} \text{ lok. Max von } f_1$$

$$x = \frac{7}{4}\sqrt{16-y^2} \Rightarrow x = \frac{7}{2}\sqrt{8} \Rightarrow x = \frac{7}{2}\sqrt{2}$$

Analog $\quad f_2(y) = 7\left(y - \sqrt{16-y^2}\right)$

$$f_2'(y) = 7\left(1 - \frac{-\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{16-y^2}}\right) = 7\,\frac{\sqrt{16-y^2}+y}{\sqrt{16-y^2}} = 0$$

$$\sqrt{16-y^2} = -y \Rightarrow \quad 16-y^2 = y^2 \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{2}$$

$$f_2''(y) = \frac{\sqrt{16-y^2} - \frac{-\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{16-y^2}}\cdot y}{16-y^2} = \frac{16-\cancel{y^2}+\cancel{y^2}}{(16-y^2)^{3/2}} > 0$$

$\Rightarrow \quad y = \pm 2\sqrt{2}$ lok Max von f_2

$$x = -\frac{7}{4}\sqrt{16-y^2} = -7\sqrt{2}$$

$_2P_1 \left(\frac{7}{2}\sqrt{2},\ \pm 2\sqrt{2}\right)$ $\qquad$ $_3P_4 \left(-\frac{7}{2}\sqrt{2},\ \pm 2\sqrt{2}\right)$

Werte vergleich $\qquad$ Min $\left(-\frac{7}{2}\sqrt{2},\ -2\sqrt{2}\right)$

Max $\left(\frac{7}{2}\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}\right)$

b) Lagrange'sche Multiplikatoren

$$F(x,y,\lambda) := f(x,y) + \lambda\left(\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{16} - 1\right) = 4x + 7y + \lambda\left(\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{16} - 1\right)$$

$$F_x = 4 + \frac{2\lambda x}{49} = 0 \implies \lambda = \frac{4 \cdot 49}{-2x}$$ für $x \neq 0$ (aber für $x = 0$ kann $F_x = 0$ nicht gelten)

$$F_y = 7 + \frac{2\lambda y}{16} = 0 \implies \lambda = -\frac{7 \cdot 16}{2y}$$

$F_\lambda = \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{16} - 1 = 0$

Also $\frac{4\cdot 49}{-2x} = -\frac{7\cdot 16}{2y} \Rightarrow \quad x = \frac{\cancel{4}\cdot \cancel{49}^{7}\cdot y}{\cancel{7}\cdot \cancel{16}_{4}} = \frac{7}{4}y$

Einsetzen in $F_\lambda = 0$ $\quad \frac{\frac{\cancel{49}}{16}y^2}{\cancel{49}} + \frac{y^2}{16} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{2y^2}{16} = 1 \Rightarrow y^2 = 8$

$\Rightarrow \quad y = \pm 2\sqrt{2}$

$x = \frac{7}{4}y \quad \Rightarrow \quad P_1\left(\frac{7}{2}\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}\right) \quad P_2\left(-\frac{7}{2}\sqrt{2}, -2\sqrt{2}\right)$

Min und Max werden angenommen weil f stetig auf einer kompakten Menge $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{16}=1$ (Ellipse)

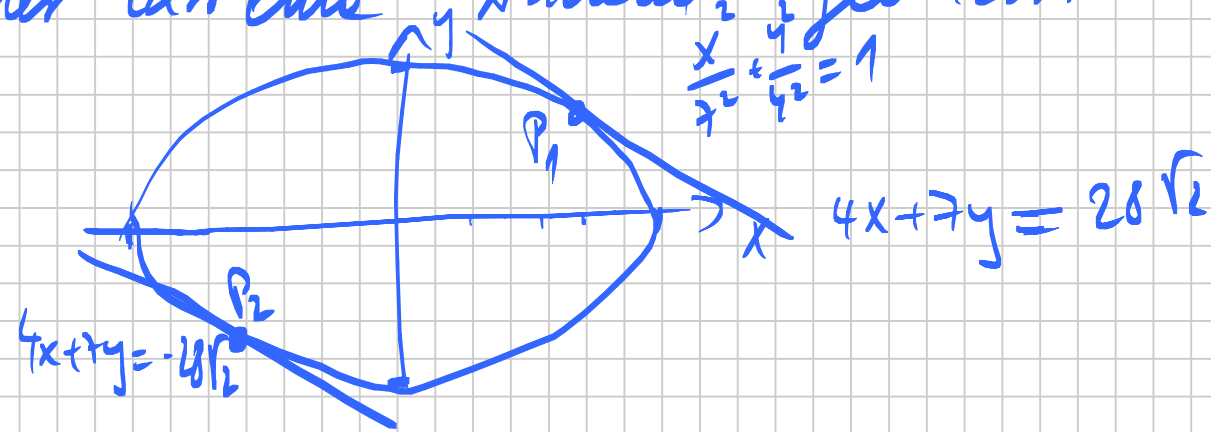
Kandidaten für Extreme P_1 und P_2

Wertevergleich $f(P_1)=28\sqrt{2}$ $f(P_2)=-28\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ P_1 ist globales Max mit Wert $28\sqrt{2}$

P_2 ist globales Min mit Wert $-28\sqrt{2}$

c) Typ der Extreme anhand geometrischer Überlegungen



Der lok. max muss im 1. Quadranten und das Minimum im 3. Quadranten liegen