Tutorium Mathematik II M WM VT

SS 2011

27. Mai 2011 - Lösungen Bsp. 2 und 3

2. Durch $z(x, y) = y^2$ ist über die Menge

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

eine Fläche F gegeben. Man berechne den Wert des Oberflächenintegrals $I = \int_F y dF$

Lösung. Es handelt sich um ein skalares Oberflächenintegral. Die Fläche F ist in parametrischer Form durch $\vec{z}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y^2 \end{pmatrix}$ gegeben. Das Oberflächenelement dF ist daher als $\sqrt{EF - G^2} dxdy$ gegeben, wobei

$$E = ||\frac{\partial \vec{z}}{\partial x}||^2 \quad F = ||\frac{\partial \vec{z}}{\partial y}||^2 \quad G = \left\langle \frac{\partial \vec{z}}{\partial x}, \frac{\partial \vec{z}}{\partial y} \right\rangle$$

Da $\frac{\partial \vec{z}}{\partial x} = (1, 0, 0)^T$ und $\frac{\partial \vec{z}}{\partial y} = (0, 1, 2y)^T$ erhalten wir

$$E = 1 \quad F = 1 + 4y^2 \text{ und } G = 0$$

Für das Oberflächenintegral gilt daher

$$\begin{aligned}
\int_F y\, dF &= \int_S y \, \sqrt{1 + 4y^2}\, dxdy \\
&= \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{y=\sqrt{x}} y(1 + 4y^2)^{1/2} dy\, dx \\
&= \frac{1}{12} \int_{x=0}^{2} (1 + 4y^2)^{3/2} \Big|_{y=0}^{y=\sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{12} \int_0^2 \left[(1 + 4x)^{3/2} - 1\right] dx \\
&= \frac{1}{12} \left[\frac{1}{10}(1 + 4x)^{5/2} - x\right]_0^2 \\
&= \frac{1}{12} \left[\frac{1}{10}(3^5 - 1) - 2\right] \\
&= \frac{243}{120} - \frac{1}{120} - \frac{20}{120} = \frac{222}{120} = \frac{37}{20}
\end{aligned}$$

3. Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfeldes
$$V = \begin{pmatrix} x^3 + xy^2 \\ x^2y + y^3 \\ x^2y \end{pmatrix}$$
durch die Fläche $F = \{(x, y, z) \colon z = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\}$, die so orientiert ist, dass die z-Komponente ihres Normalenvektors negativ ist.

Lösung.

Für die Fläche F gilt die Parametrisierung $F(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})^T$ für $(x, y) \in S = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 \leq 4\}$. Die Tangentialvektoren sind
$$\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}.$$
Der Normalvektor mit negativer z-Komponente ist folgendermaßen gegeben:
$$\vec{n} = \frac{\partial F}{\partial y} \times \frac{\partial F}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -1 \end{pmatrix}.$$
Somit erhalten wir das vektorielle Oberflächenelement
$$d\vec{F} = \vec{n} dxdy = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -1 \end{pmatrix} dxdy$$
Damit ist der gesuchte Fluss des Vektorfeldes folgendermaßen gegeben:
$$\begin{aligned} I &= \int_F \left\langle \vec{V}, d\vec{F} \right\rangle \\ &= \int_S \left\langle \vec{V}, \vec{n} \right\rangle dxdy \\ &= \int_S \left\{ \frac{x\,(x^3 + xy^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y\,(x^2y + y^3)}{\sqrt{x^2 + y^2}} - x^2y \right\} dxdy \end{aligned}$$
Da der Integrationsbereich ein Kreis ist, bietet sich eine Transformation in Polarkoordinaten an:
$$\begin{aligned} I &= \int_{r=0}^{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left\{ r^3 \cos^2 \varphi + r^3 \sin^2 \varphi - r^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi \right\} r \, d\varphi \, dr \\ &= \int_{r=0}^{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^4 \left(1 - \cos^2 \varphi \sin \varphi\right) d\varphi \, dr \\ &= \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^2 \cdot \left[\varphi - \frac{\cos^3 \varphi}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{64}{5}\,\pi \end{aligned}$$