Tutorium am 15.4.2011: Bsp. 2

Notiztitel 14.04.2011

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -6 \\ -4 & -5 & 7 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 & -6 \\ -4 & -5-\lambda & 7 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 & -6 \\ -4 & 2-\lambda & 7 \\ -1 & 2-\lambda & 3-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda) \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 & -6 \\ -4 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\left[(5-\lambda)(3-\lambda-7) - 6(-4+1)\right] = (2-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 20 + 18) = 0$$

$(2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1)=0$ (weil NS von $\lambda^2-\lambda-2=0$
$\lambda_1=2$ und $\lambda_2=-1$ sind)

$\lambda=2$ (2fach) $\lambda=-1$

Eigenwerte: $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-1$

Algebraische Vielfachheiten: 2 für λ_1 und 1 für λ_2

Eigenvektor

Zu $\lambda_1=2$:

$$\begin{pmatrix} 5-2 & 6 & -6 \\ -4 & -5-2 & 7 \\ -1 & -1 & 3-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$3x+6y-6z=0$

$-4x-7y+7z=0 \longrightarrow 3x=0 \Rightarrow x=0$

$-x-y+z=0 \longrightarrow -7x-7y+7z=0$

Eingesetzt in der ersten Gleichung:

$$6y - 6z = 0 \Rightarrow y = z$$

Eigenraum zu $\lambda_1 = 2$: $\left\{ t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$

geom. Vielfachheit $= 1 \neq$ alg. Vielfachheit

Zu $\lambda_2 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 5+1 & 6 & -6 \\ -4 & -5+1 & 7 \\ -1 & -1 & 3+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$6x + 6y - 6z = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} -4x - 4y + 7z = 0 \\ -x - y + 4z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -4x - 4y + 7z = 0 \\ -4x - 4y + 16z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} -9z = 0 \\ \Downarrow \\ \underline{z = 0} \end{array}$$

Eingesetzt in der 1. Gleichung:

$$6x + 6y = 0 \Rightarrow x = -y$$

Eigenraum $\lambda_2 = -1$: $\left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$

— geom. Vielfachheit $= 1 =$ alg. Vielfachheit.

Da für λ_1 die geom. und alg. Vielfachheiten ungleich sind ist die Matrix nicht diagonalisierbar

Bsp. 3

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

a) In welchen Pkt. (x_0, y_0) lässt sich f nach x bzw. y auflösen?

Auflösung nach y $(y = \varphi(x))$: $f_y = 3y^2 - 3x \neq 0 \qquad y^2 \neq x$

Auflösung nach x $(x = \psi(y))$: $f_x = 3x^2 - 3y \neq 0 \qquad y \neq x^2$

b) Singuläre Kurvenpunkte

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ f_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} y^4 &= y \\ y(y^3 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

$y = 0 \quad y = 1$

Eingesetzt in $x = y^2$: $\quad x = 0^2 = 0 \quad P_1\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

erfüllt $f(x,y) = 0$ also ist ein kurvenpunkt

$x = 1^2 = 1 \quad \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ erfüllt $f(x,y) = 0$ nicht

kein kurvenpkt.

Ein einziger singulärer Punkt $P_1\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$\Delta f = f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy} = (\underbrace{-3}_{f_{xy}})^2 - \underbrace{6x}_{f_{xx}} \cdot \underbrace{6y}_{f_{yy}} = 9 - 36yx$$

$\Delta f(P_1) = 9 > 0 \Longrightarrow$ ~~$P_1\binom{0}{0}$ ist ein Schnittpunkt~~

c) Extrema in Richtung der x-Achse

für $x = \psi(y)$, sodass $f(x,y) = f(\psi(y), y) = 0$

ψ existiert wenn $f_x \neq 0$ d.h. $y \neq x^2$.

$$\psi' = -\frac{f_y}{f_x} = -\frac{3y^2 - 3x}{3x^2 - 3y} = 0 \iff y^2 = x$$

Setze $y^2 = x$ in die Kurvengleichung: $(y^2)^3 + y^3 - 3y^2 y = 0$

$$y^6 - 2y^3 = 0 \qquad y^3(y^3 - 2) = 0 \Longrightarrow \begin{array}{l} y = 0 \Rightarrow x = 0 \\ y = \sqrt[3]{2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{4} \end{array}$$

$P_1\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ der singuläre Punkt

$P_2\begin{pmatrix}\sqrt[3]{4}\\ \sqrt[3]{2}\end{pmatrix}$

$$\psi'' = \frac{-f_{yy} - 2 f_{xy}\psi' - f_{xx}\psi'^2}{f_x}$$

$$\psi''(P_2) = -\frac{f_{yy}(P_2)}{f_x(P_2)} = \frac{-2y}{x^2-y} = \frac{-2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}} < 0$$

$\Downarrow$

P_2 ist ein lokales Max bzgl. x-Achse