Tutorium Mathematik II M WM VT

SS 2009

29. Mai 2009 - Lösungen

2. Gegeben sei die Kurve im $\mathbb{R}^3$ mit

$$x(t) = t, \qquad y(t) = \sqrt{1-t^2}, \qquad z(t) = \frac{1}{4}\ln\frac{1+t}{1-t} - \frac{t}{2}.$$

Berechnen Sie die Bogenlänge für $0 \le t \le 1/2$.

Lösung.

Die Bogenlänge L für $0 \le t \le 1/2$ wird mit Hilfe folgender Formel berechnet:

$$L = \int_{t=0}^{1/2} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\,dt\,. \tag{1}$$

Für die Ableitungen $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\dot{z}(t)$ gelten folgende Beziehungen:

$$\dot{x}(t) = 1 \qquad \dot{y}(t) = \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}} = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\dot{z}(t) = \frac{1}{4}\frac{1-t}{1+t}\cdot\frac{(1-t)+(1+t)}{(1-t)^2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-t)(1+t)} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t^2} - 1\right) = \frac{1}{2}\frac{t^2}{1-t^2}\,.$$

Daraus folgt:

$$\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} = \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2} + \frac{1}{4}\frac{t^4}{(1-t^2)^2}} = \sqrt{\frac{4(1-t^2)^2 + 4t^2(1-t^2) + t^4}{4(1-t^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{4(1-2t^2+t^4) + 4(t^2-t^4) + t^4}{4(1-t^2)^2}} = \sqrt{\frac{t^4 - 4t^2 + 4}{4(1-t^2)^2}} = \sqrt{\frac{(t^2-2)^2}{4(1-t^2)^2}} = \left|\frac{t^2-2}{2(1-t^2)}\right| = \frac{2-t^2}{2(1-t^2)}\,.$$

Die letzte Gleichung gilt, weil für $0 \le t \le 1/2$ der Ausdruck $t^2 - 2$ negativ und der Ausdruck $1 - t^2$ positiv ist (es gilt ja $0 \le t^2 \le 1/4$).

Setzt man in (1) ein, so erhält man:

$$L = \int_{t=0}^{1/2} \frac{2-t^2}{2(1-t^2)}dt = \frac{1}{2}\int_{t=0}^{1/2} \frac{t^2-2}{t^2-1}dt\,.$$

Wir berechnen zuerst das unbestimmte Integral $I := \int \frac{t^2-2}{t^2-1}dt$.

$$I = \int \frac{t^2-2}{t^2-1}dt = \int \frac{t^2-1-1}{t^2-1}dt = \int \left(1 - \frac{1}{t^2-1}\right)dt = \int dt - \int \frac{1}{t^2-1}dt$$

$$= t + \int \frac{1}{1-t^2}dt = t + \operatorname{artanh} t\,.$$

Für die Kurvenlänge L erhält man dann:

$$L = \frac{1}{2}\int_{t=0}^{1/2} \frac{t^2-2}{t^2-1}dt = \frac{1}{2}\left(t + \operatorname{artanh} t\right)\Big|_{t=0}^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \operatorname{artanh}\frac{1}{2}\right) \approx 0.524653\,.$$

3. Berechnen Sie (unter Angabe aller Zwischenschritte) Krümmung und Torsion für die folgenden Kurve im $\mathbb{R}^3$:

$$x(t) = \frac{1}{2}(1+\cos t), \quad y(t) = \frac{1}{2}\sin t, \quad z(t) = \frac{1}{2}(1-\cos t).$$

Ferner sollen jene Werte des Parameters t bestimmt werden für die die Krümmung ein Maximum bzw. ein Minimum annimmt.

Lösung.

Die Krümmung κ bzw. die Torsion τ sind durch folgende Formeln gegeben:

$$\kappa = \frac{\sqrt{\|\dot{\vec{x}}\|^2\|\ddot{\vec{x}}\|^2 - \langle\dot{\vec{x}},\ddot{\vec{x}}\rangle^2}}{\|\dot{\vec{x}}\|^3} \tag{2}$$

$$\tau = \frac{(\dot{\vec{x}},\ddot{\vec{x}},\dddot{\vec{x}})}{\|\dot{\vec{x}}\|^2\|\ddot{\vec{x}}\|^2 - \langle\dot{\vec{x}},\ddot{\vec{x}}\rangle^2}\,, \tag{3}$$

wobei $\dot{\vec{x}}$, $\ddot{\vec{x}}$, und $\dddot{\vec{x}}$ die Vektoren der 1., 2., bzw. 3. Ableitungen nach dem Kurvenparameter t sind, und $(\dot{\vec{x}},\ddot{\vec{x}},\dddot{\vec{x}})$ das Spatprodukt der Vektoren $\dot{\vec{x}}$, $\ddot{\vec{x}}$, $\dddot{\vec{x}}$ bezeichnet. Die Vektoren der Ableitungen sind folgendermaßen gegeben:

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sin t \\ \frac{1}{2}\cos t \\ \frac{1}{2}\sin t \end{pmatrix} \quad \ddot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cos t \\ -\frac{1}{2}\sin t \\ \frac{1}{2}\cos t \end{pmatrix} \quad \dddot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin t \\ -\frac{1}{2}\cos t \\ -\frac{1}{2}\sin t \end{pmatrix}$$

Man erhält nun für $\|\dot{\vec{x}}\|$, $\|\ddot{\vec{x}}\|$, $\langle\dot{\vec{x}},\ddot{\vec{x}}\rangle$ und $(\dot{\vec{x}},\ddot{\vec{x}},\dddot{\vec{x}})$ folgende Beziehungen:

$$\|\dot{\vec{x}}\| = \sqrt{\frac{1}{4}\sin^2 t + \frac{1}{4}\cos^2 t + \frac{1}{4}\sin^2 t} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sin^2 t} = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin^2 t}$$

$$\|\ddot{\vec{x}}\| = \sqrt{\frac{1}{4}\cos^2 t + \frac{1}{4}\sin^2 t + \frac{1}{4}\cos^2 t} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos^2 t} = \frac{1}{2}\sqrt{1+\cos^2 t}$$

$$\langle\dot{\vec{x}},\ddot{\vec{x}}\rangle = \frac{1}{4}\sin t\cos t - \frac{1}{4}\sin t\cos t + \frac{1}{4}\sin t\cos t = \frac{1}{4}\sin t\cos t$$

$$(\dot{\vec{x}},\ddot{\vec{x}},\dddot{\vec{x}}) = \det\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}\sin t & \frac{1}{2}\cos t & \frac{1}{2}\sin t \\ -\frac{1}{2}\cos t & -\frac{1}{2}\sin t & \frac{1}{2}\cos t \\ \frac{1}{2}\sin t & -\frac{1}{2}\cos t & -\frac{1}{2}\sin t \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

Die Determinante in (4) ist gleich 0 weil die 1. und die 3. Zeile der Matrix linear abhängig sind (die 3. Zeile erhält man aus der 1. Zeile durch eine Multiplikation mit -1).

Durch Einsetzen in (2) bzw. (3) erhält man:

$$\kappa = \frac{\sqrt{\frac{1}{16}(1+\sin^2 t)(1+\cos^2 t) - \frac{1}{16}\sin^2 t\cos^2 t}}{\frac{1}{8}(1+\sin^2 t)^{3/2}}$$

$$= \frac{8}{(1+\sin^2 t)\sqrt{1+\sin^2 t}}\sqrt{\frac{1+\sin^2 t\cos^2 t+\sin^2 t+\cos^2 t-\sin^2 t\cos^2 t}{16}}$$

$$= \frac{8}{(1+\sin^2 t)\sqrt{1+\sin^2 t}}\sqrt{\frac{1+\sin^2 t+\cos^2 t}{16}} = \frac{8}{(1+\sin^2 t)\sqrt{1+\sin^2 t}}\sqrt{\frac{2}{16}}$$

$$= \frac{8}{(1+\sin^2 t)\sqrt{1+\sin^2 t}\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{8}}{(1+\sin^2 t)^{3/2}}$$

sowie $\tau = 0$.

Weiters sollen die Werte des Parameters t bestimmt werden, für die die Krümmung ein Maximum bzw. eine Minimum annimmt. Zu diesem Zweck berechnen wir die 1. Ableitung der Krümmung und setzen diese Null:

$$\kappa' = -\sqrt{8}\frac{\frac{3}{2}(1+\sin^2 t)^{1/2}2\sin t\cos t}{(1+\sin^2 t)^3} = -\sqrt{8}\frac{3\sin t\cos t}{(1+\sin^2 t)^{5/2}}.$$

Aus $\kappa' = 0$ folgt $\sin t\cos t = 0$. Die Nullstellen der sin-Funktion sind $x_k = k\pi$ und die Nullstellen der cos-Funktion sind $y_k = k\pi + \frac{\pi}{2}$, wobei k eine ganze Zahl ist. Um zu bestimmen ob x_k, y_k, für $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, Extrema sind, berechnen wir den Wert der 2. Ableitung κ'' für x_k und für y_k:

$$\kappa'' = -3\sqrt{8}\frac{(\sin t\cos t)'(1+\sin^2 t)^{5/2} - (\sin t\cos t)\left((1+\sin^2 t)^{5/2}\right)'}{(1+\sin^2 t)^5}$$

$$= -3\sqrt{8}\frac{(\cos^2 t-\sin^2 t)(1+\sin^2 t)^{5/2} - \frac{5}{2}\sin t\cos t(1+\sin^2 t)^{3/2}(2\sin t\cos t)}{(1+\sin^2 t)^5}$$

$$= -3\sqrt{8}\frac{(\cos^2 t-\sin^2 t)(1+\sin^2 t)^{5/2} - 5\sin^2 t\cos^2 t(1+\sin^2 t)^{3/2}}{(1+\sin^2 t)^5}$$

$$= -3\sqrt{8}\frac{(\cos^2 t-\sin^2 t)(1+\sin^2 t) - 5\sin^2 t\cos^2 t}{(1+\sin^2 t)^{7/2}}$$

$$= -3\sqrt{8}\frac{\cos^2 t-\sin^2 t+\cos^2\sin^2 t-\sin^4 t-5\sin^2 t\cos^2 t}{(1+\sin^2 t)^{7/2}}$$

$$= -\frac{3\sqrt{8}}{(1+\sin^2 t)^{7/2}}(\cos^2 t-\sin^2 t-\sin^4 t-4\sin^2 t\cos^2 t)$$

Setzt man $t = x_k$ bzw. $t = y_k$ ein, so erhält man:

$$\kappa''(x_k) = -3\sqrt{8}\cos^2 k\pi = -3\sqrt{8} < 0 \quad (5)$$

$$\kappa''(y_k) = -\frac{3\sqrt{8}}{(1+1)^{7/2}}\left(-\sin^2(k\pi+\frac{\pi}{2}) - \sin^4(k\pi+\frac{\pi}{2})\right) = \frac{2\cdot 3\sqrt{8}}{2^3\sqrt{2}} = \frac{3}{2} > 0 \quad (6)$$

Aus (5) folgt, daß bei x_k ein lokales Maximum vorliegt, für alle ganze Zahlen k, und aus (6) folgt, daß bei y_k ein lokales Minimum vorliegt, für alle ganze Zahlen k.