Tutorium Mathematik II M WM VT
SS 2009

15. Mai 2009 - Lösungen

1. Berechnen Sie das Volumen des Bereiches, der von den beiden Flächen $x^2 + y^2 = 1 + z^2$ und $x^2 + y^2 = 2 - z^2$ begrenzt wird, und den Punkt $(0, 0, 0)$ enthält. (Alle Zwischenschritte sind anzuführen.)

   Lösung

   $x^2 + y^2 = 1 + z^2$ ist äquivalent zu $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ und stellt somit ein einschaliges Hyperbolid dar. In Zylinderkoordinaten lautet die obige Gleichung $r^2 - z^2 = 1$.

   $x^2 + y^2 = 2 - z^2$ ist äquivalent zu $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ und stellt somit eine Kugel mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius $\sqrt{2}$ dar. In Zylinderkoordinatenlautet die obige Gleichung $r^2 + z^2 = 2$. Der Körper, der durch das Hyperboloid und durch die Kugel begrenzt wird und den Punkt $(0, 0, 0)$ enthält, ist ein symmetrischer Rotationskörper. Der Schnitt dieses Körpers mit der xz-Ebene ist in Abbildung 1 dargestellt. Der Rotationskörper entsteht, wenn dieser Schnitt um die z-Achse rotiert.

   Das Volumen wird in Zylinderkoordinaten berechnet. Aus Abb. 1 sieht man, dass z sich zwischen $-\sqrt{2}$ und $\sqrt{2}$ bewegt. (Dies ergibt sich aus der Tatsache, daß der Radius der Kugel gleich $\sqrt{2}$ ist.) Da es sich um einen Rotationskörper handelt, ist für ϕ das Intervall $[0, 2\pi]$ als Integrationsbereich zu wählen. Um die Integrationsgrenzen für r und für z zu bestimmen, schneiden wir die beiden Randflächen $r^2 + z^2 = 2$ und $r^2 - z^2 = 1$. In der rz-Ebene handelt es sich um einen Kreis mit Radius $\sqrt{2}$ sowie um eine gleichseitige Hyperbel. Für die Schnittpunkte gilt $z^2 = \frac{1}{2}$ und $r^2 = \frac{3}{2}$. Auf diese Weise erhält man 4 Schnittpunkte (vgl. auch Abb. 1).

   Man sieht leicht ein, daß für $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq z \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ die Hyperbel $r^2 - z^2 = 1$ die Begrenzung des gesuchten Bereiches definiert. Damit erfolgt im $\mathbb{R}^3$ die Begrenzung durch das Hyperboloid. Somit hat man in diesem Fall $0 \leq r \leq \sqrt{1 + z^2}$. Für $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq \sqrt{2}$ wird der Körper durch die Kugelfläche begrenzt. Somit hat man $0 \leq r \leq \sqrt{2 - z^2}$.

   Zusammenfassend sind die Grenzen folgendermaßen gegeben:

$$0 \leq \phi \leq 2\pi\,, \quad 0 \leq |z| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ und } 0 \leq r \leq \sqrt{1 + z^2}$$
$$\text{sowie} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq \sqrt{2} \text{ und } 0 \leq r \leq \sqrt{2 - z^2}\,.$$

   Somit gilt für das gesuchte Volumen:

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi} \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{1+z^2}} r dr dz d\phi + \int_0^{2\pi} \int_{-\sqrt{2}}^{-1/\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-z^2}} r dr dz d\phi + \\
&\quad \int_0^{2\pi} \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-z^2}} r dr dz d\phi = \\
&= 2 \left(\underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{1+z^2}} r dr dz d\phi}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-z^2}} r dr dz d\phi}_{I_2} \right) \qquad (1)
\end{aligned}$$

   wobei die letzte Gleichung aus Symmetriegründen gilt.

Die Integrale I_1 und I_2 werden folgendermaßen berechnet:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{2\pi}\int_0^{1/\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{1+z^2}} r\,drdzd\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{r^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{1+z^2}} dzd\phi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(1+z^2\right) dzd\phi \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(z+\frac{z^3}{3}\right)\Big|_0^{1/\sqrt{2}} d\phi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{6\sqrt{2}}\right) d\phi = \frac{7}{12\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} d\phi = \frac{7\sqrt{2}\pi}{12}\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{2\pi}\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-z^2}} rdrdzd\phi = \int_0^{2\pi}\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{2-z^2}} dzd\phi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(2-z^2\right) dzd\phi \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(2z-\frac{z^3}{3}\right)\Big|_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} d\phi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(2\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{1}{6\sqrt{2}}\right) d\phi \\
&= \frac{5}{12\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} d\phi = \frac{5\sqrt{2}\pi}{12}\,.
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen in (1) erhalten wir

$$V = 2\left(\frac{7\sqrt{2}\pi}{12}+\frac{5\sqrt{2}\pi}{12}\right) = 2\sqrt{2}\pi\,.$$

2. Berechnen Sie das Volumen des Bereiches, der von $x^2+y^2=z^2$, $z=2$ und $x>0$ begrenzt wird. (Alle Zwischenschritte sind anzuführen.)

   Lösung

   Beim durch $x^2+y^2=z^2$ beschriebenen Körper handelt es sich um einen Kegel. $z=2$ stellt eine Ebene dar, die parallel zur xy-Ebene ist. $x=0$ stellt die yz-Ebene dar.

   Der Schnitt des durch die obigen 3 Flächen begrenzten Körpers mit der xoz-Ebene sieht wie in Abb. 2 aus. Aus dieser Abbildung sehen wir, daß sich z zwischen 0 und 2 bewegt. Es stellt sich als günstig heraus, Zylinderkoordinaten zu verwenden. Wir setzen also $x=r\cos\phi$ und $y=r\sin\phi$.

   Da $x>0$ gelten soll, bewegt sich ϕ zwischen $-\pi/2$ und $\pi/2$. Weiters gilt $0\le r\le\sqrt{z^2}=z$, weil der Körper durch den Kegel begrenzt wird. (Die Kegelgleichung in Zylinderkoordinaten lautet $r^2=z^2$.)

   Somit erhalten wir folgende Gleichung fuer das gesuchte Volumen V:

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^2\int_0^z r\,drdzd\phi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^2 \frac{r^2}{2}\Big|_0^z dzd\phi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^2 \frac{z^2}{2} dzd\phi \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{z^3}{3}\Big|_0^2 d\phi = \frac{1}{2}\frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi = \frac{4}{3}\pi\,.
\end{aligned}$$

   Wir können dieses Ergebnis überprüfen indem wir das Volumen eines halben Kegels mit Radius 2 und Höhe 2 ausrechnen. Das Volumen eines Kegels mit Radius R und Höhe H beträgt $\frac{R^2\pi H}{3}$. In unserem Fall ergibt sich $\frac{8\pi}{3}$ als Volumen des ganzen Kegels und somit $\frac{4\pi}{3}$ als das gesuchte Volumen des halben Kegels. Dies stimmt mit dem obigen Ergebnis überein. (Diese Vorgangsweise erfordert wesentlich weniger Rechenaufwand als die Verwendung eines Mehrfachintegrals, läßt sich aber nur in Spezialfällen gewinnbringend anwenden.)

3. Gegeben sei das "unendliche Horn", das resultiert, wenn der Graph der Funktion $f:[1,\infty)\mapsto\mathbb{R}$ mit $f(t)=1/t$ um die t-Achse rotiert.

(a) Besitzt das Horn ein endliches Volumen V^*? Bestimmen Sie ggf. den Wert von V^*.

Lösung

Falls das unendliche Horn ein endliches Volumen V^* besitzt, so ist dieses folgendermaßen gegeben:

$$V^* = \pi \int_{t=1}^{\infty} f^2(t)dt = \pi \int_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^2}dt\,. \tag{2}$$

Daher stellt sich die Frage, ob das uneigentliche Integral in (2) konvergiert. Aus der Theorie weiß man, daß das uneigentliche Integral der Form $\displaystyle\int_a^{\infty} x^{-\alpha}dx$ mit $\alpha > 1$ konvergiert. Daraus folgt, daß das Integral in (2) konvergiert. Somit besitzt das unendliche Horn ein endliches Volumen.

Um den Wert dieses Volumens zu ermitteln berechnen wir zuerst das zugehörige uneigentliche Integral. Man erhält:

$$\int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}\,.$$

V^* ist dann folgendermaßen gegeben:

$$V^* = \pi \lim_{b\to\infty} \int_{t=1}^{b} \frac{1}{t^2}\,dt = \pi \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{t}\Big|_1^b\right) = \pi \lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right) = \pi\,.$$

(b) Besitzt das Horn eine endliche Oberfläche O^*? Bestimmen Sie ggf. den Wert von O^*.

Lösung

Falls das unendliche Horn eine endliche Oberfläche besitzt, so ist diese folgendermaßen gegeben:

$$O^* = 2\pi \int_{t=1}^{\infty} f(t)\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt = 2\pi \int_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t}\sqrt{1+\frac{1}{t^4}}\,dt = 2\pi \int_{t=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1+t^4}}{t^3}\,dt\,. \tag{3}$$

Daher stellt sich die Frage ob das uneigentliche Integral in (3) konvergiert. Wir zeigen, daß dieses Integral divergiert indem wir eine divergente Minorante finden. Man beachte folgende Ungleichungen:

$$\frac{\sqrt{1+t^4}}{t^3} \geq \frac{\sqrt{t^4}}{t^3} = \frac{t^2}{t^3} = \frac{1}{t} > 0 \qquad \text{für } t > 0$$

Aus der Theorie weiß man, daß das Integral $\displaystyle\int_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t}\,dt$ divergiert. D.h. wir haben eine divergente Minorante gefunden. Somit ist das Integral in (3) divergent und folglich besitzt das Horn keine endliche Oberfläche.

(Man gelangt zum selben Ergebnis, wenn man das bestimmte Integral $\displaystyle\int_{t=1}^{a} f(t)\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$ berechnet und dann den Grenzwert für $a \to \infty$ bildet. Es zeigt sich, daß dieser Grenzwert nicht existiert. Dies Vorgangsweise ist wesentlich aufwendiger als der oben beschrittene Weg.)

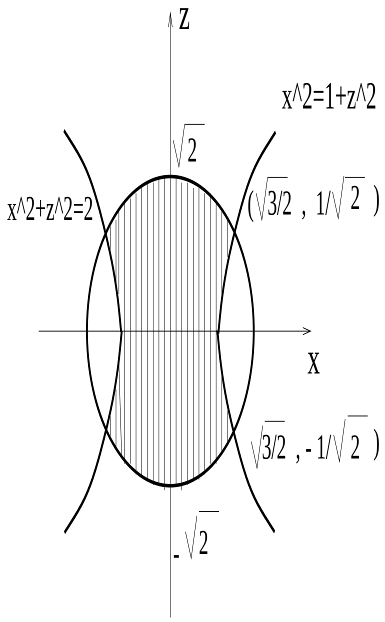

Abbildung 1

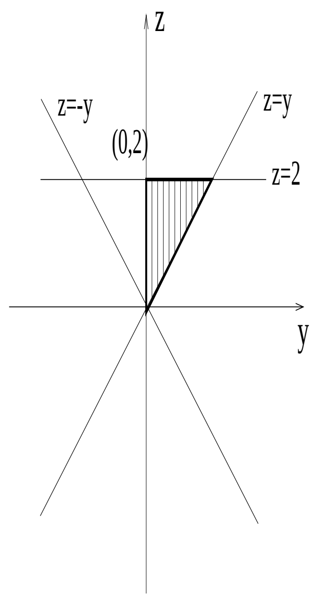

Abbildung 2