

Tutorium Mathematik II M WM VT
SS 2009

8. Mai 2009 - Lösungen

2. Überprüfen Sie die folgenden Integrale auf Existenz:

(a)

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{e^x(\sqrt{x} + x)}$$

(b)

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}}$$

(c)

$$I_3 = \int_0^\infty \frac{dx}{x(1 + \sqrt{x})}$$

Lösung:

(a) Da für $x \in [0, 1]$ stets $e^x > 1$ ist, gilt

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{e^x(\sqrt{x} + x)} \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + x} \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\sqrt{x} \Big|_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2(1 - \sqrt{\epsilon}) = 2.$$

D.h. die Majorante $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ konvergiert und somit konvergiert auch das ursprüngliche Integral I_1 .

(b) Wir teilen das Integrationsintervall auf,

$$I_2 = I_{2a} + I_{2b} \text{ wobei}$$
$$I_{2a} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}} \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$
$$I_{2b} = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}} \leq \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}.$$

Im Punkt [(a)] haben wir gezeigt, dass das Integral $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ existiert, daher existiert auch das Integral I_{2a} . Das Integral I_{2b} existiert auch weil die dazugehörige Majorante existiert:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_1^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{N}\right) = 1.$$

Da beide Teilintegrale I_{2a} und I_{2b} existieren, existiert auch das Gesamtintegral I_2 .

(c) Wir teilen hier den Integrationsbereich ebenfalls auf, können aber vermuten, dass das Integral wegen des Verhaltens bei $x = 0$ divergiert:

$$I_3 = I_{3a} + I_{3b} \text{ wobei}$$
$$I_{3a} = \int_0^1 \frac{dx}{x + x^{3/2}} \geq \int_0^1 \frac{dx}{x + x} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\ln|x|) \Big|_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (-\ln \epsilon) = \infty.$$
$$I_{3b} = \int_1^\infty \frac{dx}{x + x^{3/2}}$$

I_3 divergiert, weil das Integral I_{3a} nicht existiert.

3. Es sei

$$I := \int_{x=-1}^1 \int_{y=-|2x|}^0 (y + \sin x) dy dx.$$

(a) Zu berechnen ist der Wert des Integrals

$$I := \int_{x=-1}^1 \int_{y=-|2x|}^0 (y + \sin x) dy dx.$$

Wir lösen die Betragsfunktion in der unteren Grenze auf und teilen das Integral somit in 2 Teile auf. Da $|2x| = 2x$ für $x \geq 0$ gilt und $|2x| = -2x$ für $x \leq 0$, teilt man das Intervall $[-1, 1]$ für x in die 2 Intervalle $[-1, 0]$ und $[0, 1]$ auf. Es ergibt sich auf diesem Weg

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=-1}^0 \int_{y=2x}^0 (y + \sin x) dy dx + \int_{x=0}^1 \int_{y=-2x}^0 (y + \sin x) dy dx \\ &= \int_{x=-1}^0 \left(\frac{y^2}{2} + y \sin x \right) \Big|_{2x}^0 dx + \int_{x=0}^1 \left(\frac{y^2}{2} + y \sin x \right) \Big|_{-2x}^0 dx \\ &= \int_{x=-1}^0 \left(-\frac{4x^2}{2} - 2x \sin x \right) dx + \int_{x=0}^1 \left(-\frac{4x^2}{2} + 2x \sin x \right) dx \\ &= \int_{x=-1}^1 -2x^2 dx - \int_{x=-1}^0 2x \sin x dx + \int_{x=0}^1 2x \sin x dx \\ &= -2 \frac{x^3}{3} \Big|_{x=-1}^1 - \int_{x=-1}^0 2x \sin x dx + \int_{x=0}^1 2x \sin x dx \\ &= -\frac{4}{3} - \int_{x=-1}^0 2x \sin x dx + \int_{x=0}^1 2x \sin x dx \end{aligned}$$

Als nächstes berechnen wir nun das unbestimmte Integral $\int x \sin x dx$. Hierzu wenden wir die Methode der partiellen Integration mit $u := x$ und $v' := \sin x$ an. Daraus folgt $u' = 1$ und $v = \int \sin x dx = -\cos x$. Wir erhalten somit

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x.$$

Somit ergibt sich für I

$$\begin{aligned} I &= -\frac{4}{3} - 2(-x \cos x + \sin x) \Big|_{-1}^0 + 2(-x \cos x + \sin x) \Big|_0^1 = \\ &= -\frac{4}{3} - 2(-\cos(-1) - \sin(-1)) + 2(-\cos 1 + \sin 1) \\ &= -\frac{4}{3} - 2(-\cos 1 + \sin 1) + 2(-\cos 1 + \sin 1) = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Man sieht übrigens auch ohne Integrieren, daß $-\int_{x=-1}^0 2x \sin x dx + \int_{x=0}^1 2x \sin x dx = 0$ gilt, da die Funktion $2x \sin x$ symmetrisch ist und daher $\int_{x=-1}^0 2x \sin x dx = \int_{x=0}^1 2x \sin x dx$ gilt.

- (b) Um die Integrationsreihenfolge in I zu vertauschen, fertigen wir zunächst eine Skizze des Integrationsbereichs an (siehe Abbildung 1). Nach der Vertauschung muß y die äußere Integrationsvariable sein und x die innere. Die Grenzen für y müssen also Konstante sein (und dürfen nicht von x abhängen) während die Grenzen für x sehr wohl von y abhängen dürfen.

Aus Abbildung 1 ist ersichtlich, daß in diesem Beispiel y zwischen -2 und 0 variiert, d.h. es gilt $-2 \leq y \leq 0$. Nun gilt es die Grenzen für x zu ermitteln. Zu diesem Zweck halten wir y fest. Aus Abbildung 1 sieht man leicht, daß für ein fixes $y \in [-2, 0]$ die Variable x sich zwischen -1 und $\frac{y}{2}$ bzw. zwischen $-\frac{y}{2}$ und 1 bewegt. Daraus ergibt sich die folgende Aufteilung:

$$I := \int_{y=-2}^0 \int_{-1}^{\frac{y}{2}} (y + \sin x) dx + \int_{y=-2}^0 \int_{-\frac{y}{2}}^1 (y + \sin x) dx dy .$$

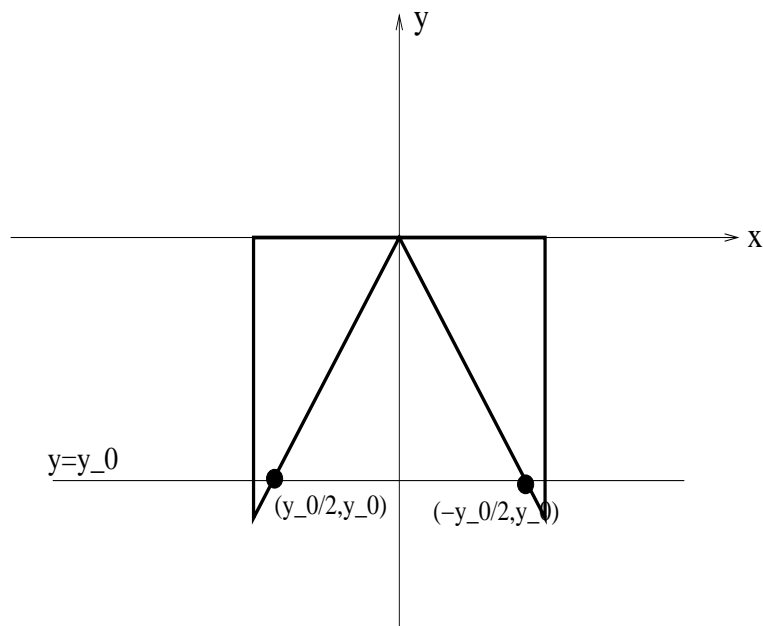


Abbildung 1