

**Tutorium Mathematik II M WM VT**  
SS 2009

8. Mai 2009 - Lösungen

2. Überprüfen Sie die folgenden Integrale auf Existenz:

(a)

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{e^x(\sqrt{x} + x)}$$

(b)

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}}$$

(c)

$$I_3 = \int_0^\infty \frac{dx}{x(1 + \sqrt{x})}$$

**Lösung:**

(a) Da für  $x \in [0, 1]$  stets  $e^x > 1$  ist, gilt

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{e^x(\sqrt{x} + x)} \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + x} \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\sqrt{x} \Big|_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2(1 - \sqrt{\epsilon}) = 2.$$

D.h. die Majorante  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$  konvergiert und somit konvergiert auch das ursprüngliche Integral  $I_1$ .

(b) Wir teilen das Integrationsintervall auf,

$$I_2 = I_{2a} + I_{2b} \text{ wobei}$$

$$I_{2a} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}} \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$I_{2b} = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}} \leq \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}.$$

Im Punkt [(a)] haben wir gezeigt, dass das Integral  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$  existiert, daher existiert auch das Integral  $I_{2a}$ . Das Integral  $I_{2b}$  existiert auch weil die dazugehörige Majorante existiert:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_1^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{N}\right) = 1.$$

Da beide Teilintegrale  $I_{2a}$  und  $I_{2b}$  existieren, existiert auch das Gesamtintegral  $I_2$ .

(c) Wir teilen hier den Integrationsbereich ebenfalls auf, können aber vermuten, dass das Integral wegen des Verhaltens bei  $x = 0$  divergiert:

$$I_3 = I_{3a} + I_{3b} \text{ wobei}$$

$$I_{3a} = \int_0^1 \frac{dx}{x + x^{3/2}} \geq \int_0^1 \frac{dx}{x + x} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\ln|x|) \Big|_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (-\ln \epsilon) = \infty.$$

$$I_{3b} = \int_1^\infty \frac{dx}{x + x^{3/2}}$$

$I_3$  divergiert, weil das Integral  $I_{3a}$  nicht existiert.

3. Es sei

$$I := \int_{x=-1}^1 \int_{y=-|2x|}^0 (y + \sin x) dy dx.$$

(a) Zu berechnen ist der Wert des Integrals

$$I := \int_{x=-1}^1 \int_{y=-|2x|}^0 (y + \sin x) dy dx.$$

Wir lösen die Betragsfunktion in der unteren Grenze auf und teilen das Integral somit in 2 Teile auf. Da  $|2x| = 2x$  für  $x \geq 0$  gilt und  $|2x| = -2x$  für  $x \leq 0$ , teilt man das Intervall  $[-1, 1]$  für  $x$  in die 2 Intervalle  $[-1, 0]$  und  $[0, 1]$  auf. Es ergibt sich auf diesem Weg

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=-1}^0 \int_{y=2x}^0 (y + \sin x) dy dx + \int_{x=0}^1 \int_{y=-2x}^0 (y + \sin x) dy dx \\ &= \int_{x=-1}^0 \left( \frac{y^2}{2} + y \sin x \right) \Big|_{2x}^0 dx + \int_{x=0}^1 \left( \frac{y^2}{2} + y \sin x \right) \Big|_{-2x}^0 dx \\ &= \int_{x=-1}^0 \left( -\frac{4x^2}{2} - 2x \sin x \right) dx + \int_{x=0}^1 \left( -\frac{4x^2}{2} + 2x \sin x \right) dx \\ &= \int_{x=-1}^1 -2x^2 dx - \int_{x=-1}^0 2x \sin x dx + \int_{x=0}^1 2x \sin x dx \\ &= -2 \frac{x^3}{3} \Big|_{x=-1}^1 - \int_{x=-1}^0 2x \sin x dx + \int_{x=0}^1 2x \sin x dx \\ &= -\frac{4}{3} - \int_{x=-1}^0 2x \sin x dx + \int_{x=0}^1 2x \sin x dx \end{aligned}$$

Als nächstes berechnen wir nun das unbestimmte Integral  $\int x \sin x dx$ . Hierzu wenden wir die Methode der partiellen Integration mit  $u := x$  und  $v' := \sin x$  an. Daraus folgt  $u' = 1$  und  $v = \int \sin x dx = -\cos x$ . Wir erhalten somit

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x.$$

Somit ergibt sich für  $I$

$$\begin{aligned} I &= -\frac{4}{3} - 2(-x \cos x + \sin x) \Big|_{-1}^0 + 2(-x \cos x + \sin x) \Big|_0^1 = \\ &= -\frac{4}{3} - 2(-\cos(-1) - \sin(-1)) + 2(-\cos 1 + \sin 1) \\ &= -\frac{4}{3} - 2(-\cos 1 + \sin 1) + 2(-\cos 1 + \sin 1) = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Man sieht übrigens auch ohne Integrieren, daß  $-\int_{x=-1}^0 2x \sin x dx + \int_{x=0}^1 2x \sin x dx = 0$  gilt, da die Funktion  $2x \sin x$  symmetrisch ist und daher  $\int_{x=-1}^0 2x \sin x dx = \int_{x=0}^1 2x \sin x dx$  gilt.

- (b) Um die Integrationsreihenfolge in I zu vertauschen, fertigen wir zunächst eine Skizze des Integrationsbereichs an (siehe Abbildung 1). Nach der Vertauschung muß  $y$  die äußere Integrationsvariable sein und  $x$  die innere. Die Grenzen für  $y$  müssen also Konstante sein (und dürfen nicht von  $x$  abhängen) während die Grenzen für  $x$  sehr wohl von  $y$  abhängen dürfen.

Aus Abbildung 1 ist ersichtlich, daß in diesem Beispiel  $y$  zwischen  $-2$  und  $0$  variiert, d.h. es gilt  $-2 \leq y \leq 0$ . Nun gilt es die Grenzen für  $x$  zu ermitteln. Zu diesem Zweck halten wir  $y$  fest. Aus Abbildung 1 sieht man leicht, daß für ein fixes  $y \in [-2, 0]$  die Variable  $x$  sich zwischen  $-1$  und  $\frac{y}{2}$  bzw. zwischen  $-\frac{y}{2}$  und  $1$  bewegt. Daraus ergibt sich die folgende Aufteilung:

$$I := \int_{y=-2}^0 \int_{-1}^{\frac{y}{2}} (y + \sin x) dx + \int_{y=-2}^0 \int_{-\frac{y}{2}}^1 (y + \sin x) dx dy .$$

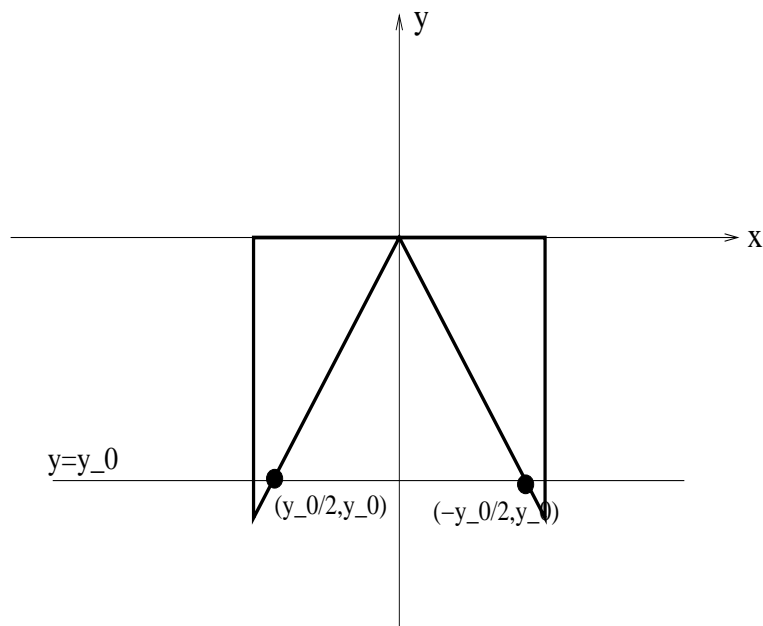


Abbildung 1