

Tutorium Mathematik II M WM VT
SS 2009

3. April 2009 - Lösungen

2. Wo nimmt die Funktion $f(x, y, z) = xyz$ auf der abgeschlossenen Kugel $B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ ihr Maximum an?

Lösung.

Die Funktion $f(x, y, z) = xyz$ ist stetig und nimmt daher auf einem abgeschlossenen und beschränkten Bereich ihr Maximum (sowie auch ihr Minimum) an. Das Maximum wird entweder in einem inneren Punkt der Kugel, d.h. in einem Punkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mit $x^2 + y^2 + z^2 < 1$, oder in einem Punkt am Rande der Kugel, d.h. an einem Punkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mit $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, angenommen. Falls das Maximum in einem inneren Punkt der Kugel angenommen wird, so ist dieser Punkt auch ein lokales Maximum der Funktion f . Wir untersuchen zuerst also die lokalen Maxima von f . Dafür werden die kritischen Punkte bestimmt in dem der Gradient von f gleich Null gesetzt wird.

$$f_x(x, y, z) = yz = 0 \text{ und } f_y(x, y, z) = xz = 0 \text{ und } f_z(x, y, z) = xy = 0,$$

oder äquivalent

$$(y = 0 \vee z = 0) \wedge (x = 0 \vee z = 0) \wedge (x = 0 \vee y = 0),$$

und weiterhin äquivalent zu

$$(y = 0 \wedge x = 0) \vee (y = 0 \wedge z = 0) \vee (z = 0 \wedge x = 0).$$

Die Bedingung $(y = 0 \wedge x = 0)$ wird nur von den Punkten der z -Achse erfüllt, die Bedingung $(y = 0 \wedge z = 0)$ wird nur von den Punkten der x -Achse erfüllt, und die Bedingung $(z = 0 \wedge x = 0)$ wird nur von den Punkten der y -Achse erfüllt. Also sind die kritischen Punkte, alle Punkte die auf den Achsen des Koordinatensystems liegen. Die Menge K der kritischen Punkte ist also folgendermaßen gegeben:

$$K = \{(a, 0, 0) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, a, 0) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, 0, a) : a \in \mathbb{R}\}$$

Nun untersuchen wir ob unter den kritischen Punkten lokale Extrema (Maxima) gibt. Dazu berechnen wir die Hesse-Matrix $H_f(x, y, z)$:

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y, z) & f_{xy}(x, y, z) & f_{xz}(x, y, z) \\ f_{yx}(x, y, z) & f_{yy}(x, y, z) & f_{yz}(x, y, z) \\ f_{zx}(x, y, z) & f_{zy}(x, y, z) & f_{zz}(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$$

Es ist leicht festzustellen, dass $\det H_f(x, y, z) = 0 \forall (x, y, z) \in K$. Also gibt die Definitheit von $H_f(x, y, z)$ keinen Aufschluss über den Status der kritischen Punkte als lokale Extrema. Wir zeigen, dass unter den kritischen Punkten keine lokalen Extrema gibt, indem wir für jeden kritischen Punkt $(x_0, y_0, z_0) \in K$ folgende Eigenschaft nachweisen: In jeder Umgebung von (x_0, y_0, z_0) gibt es mindestens einen Punkt (x_1, y_1, z_1) mit $f(x_1, y_1, z_1) < f(x_0, y_0, z_0)$ und mindestens einen Punkt (x_2, y_2, z_2) mit $f(x_2, y_2, z_2) > f(x_0, y_0, z_0)$. In der Tat zeigen wir diese Behauptung für den kritischen Punkt $(0, 0, 0)$ und einen kritischen Punkt der Form $(a, 0, 0)$, $a \neq 0$. Die anderen kritischen Punkte $(0, a, 0)$ und $(0, 0, a)$, $a \neq 0$, können analog behandelt werden.

Ad Punkt $(0, 0, 0)$: $\forall \epsilon > 0$ gilt $f(\epsilon, \epsilon, \epsilon) = \epsilon^3 > 0$, $d((\epsilon, \epsilon, \epsilon), (0, 0, 0)) = \sqrt{3}\epsilon$ und $f(-\epsilon, \epsilon, \epsilon) = -\epsilon^3 < 0$, $d((-\epsilon, \epsilon, \epsilon), (0, 0, 0)) = \sqrt{3}\epsilon$.

Ad Punkt $(a, 0, 0)$, $a \neq 0$: Wir betrachten den Fall $a > 0$; der Fall $a < 0$ kann analog behandelt werden. $\forall \epsilon > 0$ gilt $f(a, \epsilon, \epsilon) = a\epsilon^2 > 0$, $d((a, \epsilon, \epsilon), (a, 0, 0)) = \sqrt{2}\epsilon$ und $f(a, -\epsilon, \epsilon) = -a\epsilon^2 < 0$, $d((a, -\epsilon, \epsilon), (a, 0, 0)) = \sqrt{2}\epsilon$.

Nun ist kein kritischer Punkt ein Extremum und das Maximum der Funktion f auf der Kugel $\{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ wird auf dem Rand $\{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ angenommen. Wir beobachten, dass f schief-symmetrisch bzgl. jeder Koordinate ist, d.h. $f(-x, y, z) = -f(x, y, z)$, $f(x, -y, z) = -f(x, y, z)$ und $f(x, y, -z) = -f(x, y, z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$. Weiters gilt $\text{signum}(f(x, y, z)) = \text{signum}(x) \cdot \text{signum}(y) \cdot \text{signum}(z)$ und es reicht daher, die Maxima von $f(x, y, z)$ für (x, y, z) mit $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ zu bestimmen. Falls (x_0, y_0, z_0) eine Maximalstelle von f auf $\{(x, y, z): x > 0, y > 0, z > 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ist, so sind auch $(-x_0, -y_0, z_0)$, $(x_0, -y_0, -z_0)$ und $(-x_0, y_0, -z_0)$ Maximalstellen von f auf $\{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Wir bestimmen nun die Maximalstellen von $f(x, y, z) = xyz$ auf $\{(x, y, z): x > 0, y > 0, z > 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, was äquivalent zur Bestimmung der Maximalstellen von $F(x, y) = xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ auf $\{(x, y): x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < 1\}$ ist. Dazu bestimmen wir zuerst die lokalen Maxima von $F(x, y)$ auf $\{(x, y): x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < 1\}$. Dann vergleichen wir die Werte dieser lokalen Maxima um das gesuchte Maximum und die entsprechenden Maximalstellen zu bestimmen.

Es gilt

$$F_x(x, y) = y\sqrt{1 - x^2 - y^2} + xy \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = y \frac{1 - 2x^2 - y^2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$F_y(x, y) = x\sqrt{1 - x^2 - y^2} + xy \frac{-2y}{2\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = x \frac{1 - 2y^2 - x^2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

Bestimmung der kritischen Punkte von F auf $\{(x, y): x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < 1\}$:

$$\begin{cases} F_x(x, y) = 0 \\ F_y(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - 2x^2 - y^2 = 0 \\ 1 - 2y^2 - x^2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y^2 = 1 - 2x^2 \\ 1 - 2(1 - 2x^2) - x^2 = 0 \end{cases}$$

Die zweite Gleichung des letzten Gleichungssystems impliziert $x^2 = 1/3$ und somit $x = 1/\sqrt{3}$. Eingesetzt in der ersten Gleichung ergibt das $y = 1/\sqrt{3}$.

Nun berechnen wir die Hesse-Matrix von $F(x, y)$:

$$F_{xx}(x, y) = xy \frac{2x^2 + 3y^2 - 3}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}} \quad F_{yy}(x, y) = xy \frac{2y^2 + 3x^2 - 3}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}} \quad \text{und}$$

$$F_{xy}(x, y) = \frac{1 - 3y^2 - 3x^2 + 2x^4 + 2y^4 + 3x^2y^2}{(1 - x^2 - y^2)(3/2)}.$$

Es gilt daher

$$F_{xx}(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = -4/\sqrt{3} = F_{yy}(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \quad \text{und} \quad F_{xy} = -2/(\sqrt{3}),$$

und

$$H_F(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} -4/\sqrt{3} & -2/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{3} & -4/\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \det(H_F(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})) = 4 > 0.$$

$H_F(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ ist also negativ-definit und $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ ist somit eine Maximalstelle von F . Die dazugehörige Maximalstelle von f ist $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, \sqrt{1 - 1/3 - 1/3}) = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ und das Maximum ist $f(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = \frac{1}{3\sqrt{3}}$. Nun sind dann auch die Punkte $(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$ und $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$ Maximalstellen von f (alle mit dem gleichen Funktionswert von $\frac{1}{3\sqrt{3}}$).

Zusammenfassung:

Es gibt vier Maximalstellen von f auf der Kugel $\{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ und die sind $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$, $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$. Der Wert des Maximums ist $\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

3. Bestimmen Sie die Extrema von $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ inkl. Typ und Funktionswert unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

Lösung.

Die Funktion f ist für $x \neq 0$ und $y \neq 0$ definiert und somit in den Punkten $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ und $(0, -1)$ des Kreises $x^2 + y^2 = 1$ nicht definiert. Wir lösen die Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$ nach y auf und unterscheiden zwei Fälle, je nach Vorzeichen von y .

Fall I: $y = \sqrt{1 - x^2}$, d.h., $y > 0$. Durch Einsetzen in f erhalten wir die neue Funktion $F(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ mit Definitionsbereich $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

Fall II: $y = -\sqrt{1 - x^2}$, d.h., $y < 0$. Durch Einsetzen in f erhalten wir die neue Funktion $G(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ebenfalls mit Definitionsbereich $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

Es gilt nun für die Funktionen F und G die lokalen und globalen Extrema in den jeweiligen Definitionsbereichen zu suchen und daraus die lokalen und globalen Extrema der Funktion f abzuleiten. Es sei angemerkt, dass die globalen Minima und Maxima von F und G (und somit auch jene von f) nicht unbegrenzt angenommen werden, da der Definitionsbereich der Funktionen F und G eine offene Menge ist.

Fall I: Bestimmung der Extrema von Funktion F . Zuerst bestimmen wir die kritischen Punkte durch Nullsetzung der ersten Ableitung von F :

$$F'(x) = \frac{x}{1 - x^{2^{3/2}}} - \frac{1}{x^2} = 0 \implies x^3 = (1 - x^2)^{3/2} \implies x = \sqrt{1 - x^2} > 0$$

und somit

$$x^2 = 1 - x^2 \implies x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Wir überprüfen anhand der zweiten Ableitung $F''(\frac{1}{\sqrt{2}})$ ob $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ein Extremum ist und bestimmen ggf. seinen Typus:

$$F''(x) = \frac{(1 - x^2)^{3/2} - x^{\frac{3}{2}}(1 - x^2)^{1/2}(-2x)}{(1 - x^2)^3} - \frac{-2x}{x^4} = \frac{(1 - x^2)^{1/2}((1 - x^2) + 3x^3)}{(1 - x^2)^3} + \frac{2}{x^3} = \frac{1 + 2x^2}{(1 - x^2)^{5/2}} + \frac{2}{x^3}$$

Durch Einsetzen erhalten wir $F''(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 12\sqrt{2} > 0$ und somit ist $\frac{1}{\sqrt{2}}$ eine lokale Minimalstelle von F . Die dazugehörige lokale Minimalstelle von f ist $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ mit $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = 2\sqrt{2}$.

Fall II: Bestimmung der Extrema von Funktion G . Zuerst bestimmen wir die kritischen Punkte durch Nullsetzung der ersten Ableitung von G :

$$G'(x) = -\frac{x}{1-x^{23/2}} - \frac{1}{x^2} = 0 \implies x^3 = -(1-x^2)^{3/2} \implies x = -\sqrt{1-x^2} < 0$$

und somit

$$x^2 = 1 - x^2 \implies x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Wir überprüfen anhand der zweiten Ableitung $G''(-\frac{1}{\sqrt{2}})$ ob $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ein Extremum ist und bestimmen ggf. seinen Typus:

$$G''(x) = \frac{-(1-x^2)^{3/2} + x\frac{3}{2}(1-x^2)^{1/2}(-2x)}{(1-x^2)^3} - \frac{-2x}{x^4} = \frac{-(1-x^2)^{1/2}((1-x^2) + 3x^3)}{(1-x^2)^3} + \frac{2}{x^3} =$$

$$-\frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{5/2}} + \frac{2}{x^3}$$

Durch Einsetzen erhalten wir $G''(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -12\sqrt{2} < 0$ und somit ist $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ eine lokale Maximalstelle von G . Die dazugehörige lokale Maximalstelle von f ist $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ mit $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = -2\sqrt{2}$.

Somit haben wir die lokalen Extrema von F bestimmt: $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ist ein lokales Minimum mit Funktionswert $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = 2\sqrt{2}$ und $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ist ein lokales Maximum mit Funktionswert $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = -2\sqrt{2}$.

Nun beschäftigen wir uns mit den globalen Extrema. Wir beobachten, dass der Funktionswert $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = -2\sqrt{2}$ des lokalen Maximums kleiner als der Funktionswert $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = 2\sqrt{2}$ des lokalen Minimums ist. Somit sind diese lokalen Extrema keine globalen Extrema. Es stellt sich nun die Frage ob die globalen Extrema der Funktion f auf dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$ existieren. Wir beobachten, dass $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0^+)} (\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) = +\infty$ und $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0^-)} (\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) = -\infty$ und daraus folgt, dass die globalen Extrema von $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ auf $x^2 + y^2 = 1$ nicht existieren.