

Tutorium Mathematik II M WM VT
SS 2009

27 März 2009 - Lösungen

2. Gegeben sei die Funktion f mit

$$f(x, y) := (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

(a) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f .

Lösung.

Um die lokalen Extrema von f zu bestimmen, berechnen wir die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung. Es ergibt sich

$$f_x(x, y) = 2xe^{-(x^2+y^2)} (1 - x^2 - 2y^2)$$

$$f_y(x, y) = 2ye^{-(x^2+y^2)} (2 - x^2 - 2y^2)$$

$$f_{xx}(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} [2 - 6x^2 - 4y^2 - 4x^2 (1 - x^2 - 2y^2)]$$

$$f_{yy}(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} [4 - 2x^2 - 12y^2 - 4y^2 (2 - x^2 - 2y^2)]$$

und

$$f_{xy}(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} [-8xy - 4xy (1 - x^2 - 2y^2)].$$

Um die kritischen Punkte (=Kandidaten für lokale Extrema) zu ermitteln, setzen wir den Gradienten gleich dem Nullvektor. Es ergeben sich folgende zwei Forderungen

$$f_x(x, y) = 2xe^{-(x^2+y^2)} (1 - x^2 - 2y^2) = 0$$

$$f_y(x, y) = 2ye^{-(x^2+y^2)} (2 - x^2 - 2y^2) = 0$$

Da $e^{x^2+y^2}$ nie 0 wird und da ein Produkt von 2 Faktoren genau dann Null ist, wenn zumindest einer der beiden Faktoren gleich Null ist, unterscheiden wir nun 4 Fälle.

- i. $x = 0$ und $y = 0$. Dies liefert den kritischen Punkt $S_1(0, 0)$.
- ii. $x = 0$ und $2 - x^2 - 2y^2 = 0$. Einsetzen von $x = 0$ in die zweite Bedingung liefert $2y^2 = 2$ und damit $y = \pm 1$. Dies führt auf die kritischen Punkte $S_2(0, 1)$ und $S_3(0, -1)$.
- iii. $y = 0$ und $1 - x^2 - 2y^2 = 0$. Einsetzen von $y = 0$ in die zweite Bedingung liefert $x^2 = 1$ und damit $x = \pm 1$. Dies führt auf die kritischen Punkte $S_4(1, 0)$ und $S_5(-1, 0)$.
- iv. $1 - x^2 - 2y^2 = 0$ und $2 - x^2 - 2y^2 = 0$. Dieses Gleichungssystem ist offensichtlich widersprüchlich. Es gibt keine Lösung und somit keinen weiteren kritischen Punkt.

Es gilt nun die fünf kritischen Punkte zu untersuchen. Dazu müssen wir die Hessematrix H_f von f in diesen vier Punkten auswerten. Es ergibt sich

$$M_1 = H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad M_2 = H_f(0, 1) = H_f(0, -1) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{e} \end{pmatrix}$$

$$M_3 = H_f(1, 0) = H_f(-1, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{pmatrix}$$

Die Matrix M_1 ist positiv definit (positive Determinante und positives Element in der ersten Zeile und Spalte). Die Matrix M_2 ist negativ definit (positive

Determinante und negatives Element in der ersten Zeile und Spalte). Die Matrix M_3 ist indefinit (negative Determinante).

Aus S_1 ergibt sich somit das **lokale Minimum** $(0,0,0)$. (Die dritte Koordinate, die dem Funktionswert von f für $(0,0)$ entspricht nicht vergessen!). Aus S_2 und S_3 ergeben sich die **lokalen Maxima** $(0, 1, \frac{2}{e})$ und $(0, -1, \frac{2}{e})$. Aus S_4 und S_5 resultieren die **Sattelpunkte** $(1, 0, -\frac{1}{e})$ und $(-1, 0, -\frac{1}{e})$.

- (b) Was läßt sich über die globalen Extrema von f im Bereich $0 \leq |x|, |y| \leq 1$ aussagen?

Lösung.

Da offensichtlich $f(x, y) \geq 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt, ist $(0, 0, 0)$ ein **globales Minimum** der Funktion f . Da $f(x, y) \neq 0$ für $(x, y) \neq (0, 0)$, handelt es sich hierbei um das einzige globale Minimum.

Zur Bestimmung der lokalen Maxima muß der Rand des Gebietes $0 \leq |x|, |y| \leq 1$ untersucht werden. Das Gebiet ist ein Quadrat der Seitenlänge 2 mit Mittelpunkt im Ursprung. Die 4 Seiten des Randes werden durch $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$ und $y = -1$ beschrieben. Da die Funktion f symmetrisch bezüglich der x - und der y -Achse ist, reicht es die Fälle $x = 1$ und $y = 1$ zu untersuchen.

- i. Sei $x = 1$. Einsetzen von $x = 1$ in $f(x, y)$ liefert die Hilfsfunktion $g(y) = f(1, y) = e^{-1-y^2} (1 + 2y^2)$. Gesucht sind nun die Maxima dieser Funktion im Bereich $-1 \leq y \leq 1$. Zu deren Ermittlung bestimmen wir $g'(y)$. Es ergibt sich

$$g'(y) = -2ye^{-1-y^2} (1 + 2y^2) + 4ye^{-1-y^2} = 2y(1 - 2y^2) e^{-1-y^2}.$$

Nullsetzen von $g'(y)$ liefert dann $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $y_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Aus y_1 ergibt sich der Punkt $(1, 0, -\frac{1}{e})$, der bereits oben untersucht wurde. Da $f(1, y_2) = f(1, y_3) = \frac{2}{e^{1.5}} < \frac{2}{e} = f(0, 1)$ gilt, brauchen auch die aus y_2 und y_3 resultierenden Punkte nicht weiter untersucht werden; sie kommen keinesfalls für globale Maxima in Frage.

- ii. Sei $y = 1$. Einsetzen von $y = 1$ in $f(x, y)$ liefert die Hilfsfunktion $h(x) = f(x, 1) = e^{-x^2-1} (2 + x^2)$. Gesucht sind nun die Maxima dieser Funktion im Bereich $-1 \leq x \leq 1$. Zu deren Ermittlung bestimmen wir $h'(x)$. Es ergibt sich

$$h'(x) = -2xe^{-x^2-1} (2 + x^2) + 2xe^{-x^2-1} = 2xe^{-x^2-1} (-1 - x^2).$$

Nullsetzen von $g'(x)$ liefert $x = 0$. Der daraus resultierende Punkt $(0, 1, \frac{2}{e})$ wurde bereits in (a) untersucht.

Schlußendlich sind noch die 4 Eckpunkte des Quadrats zu überprüfen. Da $f(1, 1) = f(1, -1) = f(-1, -1) = f(-1, 1) = \frac{3}{e^2} < \frac{2}{e}$ gilt, liefern auch die Eckpunkte des Quadrats keine Punkte mit einem größeren Funktionswert als die Punkte S_2 und S_3 . Diese lokalen Maxima sind also zugleich auch **globale Maxima**.

3. Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y, z) = \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{z}{2}$$

für $x, y, z \geq 0$. Bestimmen Sie die Extrema von f (und deren Typ) unter der Nebenbedingung $x + y + z = \pi$.

Lösung.

Da auch der Typ der Extrema gefragt ist und sich die Nebenbedingung leicht auflösen läßt, ist eine Anwendung der Lagrange-Methode nicht zielführend.

Durch Auflösung der Nebenbedingung $x+y+z = \pi$ nach z erhalten wir $z = \pi - x - y$. Wir setzen nun diesen Ausdruck für z in die Funktion f ein und erhalten eine neue Funktion g , die nur noch von x und y abhängt. Es gilt

$$g(x, y) = f(x, y, \pi - x - y) = \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{y}{2} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \right).$$

Gesucht sind nun die lokalen Extrema der Funktion g . Nebenbedingungen liegen keine mehr vor. Zur Bestimmung der lokalen Extrema von g bestimmen wir die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung. Die Berechnung der Ableitungen wird erleichtert, wenn wir die Funktion g durch Anwendung der Beziehung $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$ wie folgt umschreiben:

$$g(x, y) = \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{y}{2} \cdot \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2} \right).$$

Für die partiellen Ableitung g_x erhält man nun

$$g_x(x, y) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2} \right) - \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2} \right) \right) \sin \frac{y}{2} \quad (1)$$

Nach dem Additionstheorem für die Cosinus-Funktion gilt $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$. Setzt man im obigen Ausdruck $\alpha = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}$ und $\beta = \frac{x}{2}$, so läßt sich (1) wie folgt umformen

$$g_x(x, y) = \frac{1}{2} \cos \left(x + \frac{y}{2} \right) \cdot \sin \frac{y}{2}$$

Auf analogem Weg (oder durch Symmetrieüberlegungen) erhält man

$$g_y(x, y) = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \left(\frac{x}{2} + y \right).$$

Die Ableitungen zweiter Ordnung haben die folgende Gestalt:

$$g_{xx}(x, y) = -\frac{1}{2} \sin \left(x + \frac{y}{2} \right) \cdot \sin \frac{y}{2}$$

$$g_{yy}(x, y) = -\frac{1}{2} \sin \left(\frac{x}{2} + y \right) \cdot \sin \frac{x}{2}$$

$$g_{xy}(x, y) = \frac{1}{4} \left(\cos \frac{y}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{y}{2} \right) - \sin \frac{y}{2} \cdot \sin \left(x + \frac{y}{2} \right) \right) = \frac{1}{4} \cos(x + y).$$

Um die kritischen Punkte (=Kandidaten für lokale Extrema) zu ermitteln, setzen wir den Gradienten gleich dem Nullvektor. Es ergeben sich folgende zwei Forderungen

$$g_x(x, y) = \frac{1}{2} \cos \left(x + \frac{y}{2} \right) \cdot \sin \frac{y}{2} = 0$$

und

$$g_y(x, y) = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \left(\frac{x}{2} + y \right) = 0$$

Da ein Produkt von 2 Faktoren genau dann Null ist, wenn zumindest einer der beiden Faktoren gleich Null ist, unterscheiden wir nun 4 Fälle.

(a) $\sin \frac{x}{2} = 0$ und $\sin \frac{y}{2} = 0$.

Da nach Voraussetzung $0 \leq x, y \leq \pi$ gilt, folgt $x = 0$ und $y = 0$.

(b) $\sin \frac{x}{2} = 0$ und $\cos \left(x + \frac{y}{2} \right) = 0$.

Aus $\sin \frac{x}{2} = 0$ und $0 \leq x \leq \pi$ folgt $x = 0$. Einsetzen in die zweite Bedingung liefert dann zusammen mit $0 \leq y \leq \pi$, daß $y = \pi$ gelten muß.

(c) $\sin \frac{y}{2} = 0$ und $\cos \left(y + \frac{x}{2} \right) = 0$.

Analoge Vorgangsweise wie im obigen Fall liefert $x = \pi$ und $y = 0$. (Stattdessen kann auch über die Symmetrie argumentiert werden.)

(d) $\cos\left(x + \frac{y}{2}\right) = 0$ und $\cos\left(y + \frac{x}{2}\right) = 0$.

Da $x + y + z = \pi$ und $x, y, z \geq 0$ zu gelten hat, folgt $0 \leq x + y \leq \pi$. Somit gilt dann auch $0 \leq \frac{x}{2} + y \leq \pi$ und $0 \leq \frac{y}{2} + x \leq \pi$. Daher können die obigen zwei Bedingungen nur für $\frac{x}{2} + y = \frac{\pi}{2}$ und $\frac{y}{2} + x = \frac{\pi}{2}$ erfüllt sein. Lösen dieses Gleichungssystems ergibt $x = y = \frac{\pi}{3}$.

Es gilt nun die vier kritischen Punkte $S_1 = (0, 0)$, $S_2 = (0, \pi)$, $S_3 = (\pi, 0)$ und $S_4 = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ zu untersuchen. Dazu müssen wir die Hessematrix H_g von g in diesen vier Punkten auswerten.

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} M_1 = H_g(0, 0) &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} & M_2 = H_g(\pi, 0) &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ M_3 = H_g(0, \pi) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} & M_4 = H_g\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Matrizen M_1 , M_2 und M_3 sind indefinit (ihre Determinante ist < 0). Die Matrix M_4 ist negativ definit (ihre Determinante ist positiv und das Element in der ersten Zeile und Spalte ist negativ).

Somit liegt für $x = \frac{\pi}{3}$ und $y = \frac{\pi}{3}$ ein **lokales Maximum** der Funktion g vor. Setzt man in die Nebenbedingung ein, so ergibt sich $z = \frac{\pi}{3}$. Der Funktionswert an der Stelle $x = \frac{\pi}{3}$, $y = \frac{\pi}{3}$ und $z = \frac{\pi}{3}$ beträgt $\frac{1}{8}$. Der Punkt $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{1}{8})$ (4 Koordinaten!!) stellt somit ein **lokales Maximum** von f dar.

Analog ergibt sich, daß die Punkte $(0, 0, \pi, 0)$, $(0, \pi, 0, 0)$ und $(\pi, 0, 0, 0)$ **Sattelpunkte** von f darstellen. Da $\sin u \geq 0$ für alle $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gilt, folgt $f(x, y, z) \geq 0$ auf dem von uns betrachteten Bereich. Daher stellen die drei Punkte $(0, \pi, 0, 0)$, $(\pi, 0, 0, 0)$ und $(0, 0, \pi, 0)$ alle zugleich **globale Minima** von f dar.