Tutorium Mathematik II M WM VT
SS 2009

27 März 2009 - Lösungen

2. Gegeben sei die Funktion f mit

$$f(x,y) := (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

(a) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f.

Lösung.

Um die lokalen Extrema von f zu bestimmen, berechnen wir die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung. Es ergibt sich

$$f_x(x,y) = 2xe^{-(x^2+y^2)}\left(1 - x^2 - 2y^2\right)$$

$$f_y(x,y) = 2ye^{-(x^2+y^2)}\left(2 - x^2 - 2y^2\right)$$

$$f_{xx}(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}\left[2 - 6x^2 - 4y^2 - 4x^2\left(1 - x^2 - 2y^2\right)\right]$$

$$f_{yy}(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}\left[4 - 2x^2 - 12y^2 - 4y^2\left(2 - x^2 - 2y^2\right)\right]$$

und

$$f_{xy}(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}\left[-8xy - 4xy\left(1 - x^2 - 2y^2\right)\right].$$

Um die kritischen Punkte (=Kandidaten für lokale Extrema) zu ermitteln, setzen wir den Gradienten gleich dem Nullvektor. Es ergeben sich folgende zwei Forderungen

$$f_x(x,y) = 2xe^{-(x^2+y^2)}\left(1 - x^2 - 2y^2\right) = 0$$

$$f_y(x,y) = 2ye^{-(x^2+y^2)}\left(2 - x^2 - 2y^2\right) = 0$$

Da $e^{x^2+y^2}$ nie 0 wird und da ein Produkt von 2 Faktoren genau dann Null ist, wenn zumindest einer der beiden Faktoren gleich Null ist, unterscheiden wir nun 4 Fälle.

i. $x = 0$ und $y = 0$. Dies liefert den kritischen Punkt $S_1(0,0)$.

ii. $x = 0$ und $2 - x^2 - 2y^2 = 0$. Einsetzen von $x = 0$ in die zweite Bedingung liefert $2y^2 = 2$ und damit $y = \pm 1$. Dies führt auf die kritischen Punkte $S_2(0,1)$ und $S_3(0,-1)$.

iii. $y = 0$ und $1 - x^2 - 2y^2 = 0$. Einsetzen von $y = 0$ in die zweite Bedingung liefert $x^2 = 1$ und damit $x = \pm 1$. Dies führt auf die kritischen Punkte $S_4(1,0)$ und $S_5(-1,0)$.

iv. $1 - x^2 - 2y^2 = 0$ und $2 - x^2 - 2y^2 = 0$. Dieses Gleichungssystem ist offensichtlich widersprüchlich. Es gibt keine Lösung und somit keinen weiteren kritischen Punkt.

Es gilt nun die fünf kritischen Punkte zu untersuchen. Dazu müssen wir die Hessematrix H_f von f in diesen vier Punkten auswerten. Es ergibt sich

$$M_1 = H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad M_2 = H_f(0,1) = H_f(0,-1) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{e} \end{pmatrix}$$

$$M_3 = H_f(1,0) = H_f(-1,0) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{pmatrix}$$

Die Matrix M_1 ist positiv definit (positive Determinante und positives Element in der ersten Zeile und Spalte). Die Matrix M_2 ist negativ definit (positive

Determinante und negatives Element in der ersten Zeile und Spalte). Die Matrix M_3 ist indefinit (negative Determinante).

Aus S_1 ergibt sich somit das **lokale Minimum** (0,0,0). (Die dritte Koordinate, die dem Funktionswert von f für (0,0) entspricht nicht vergessen!!). Aus S_2 und S_3 ergeben sich die **lokalen Maxima** $(0, 1, \frac{2}{e})$ und $(0, -1, \frac{2}{e})$. Aus S_4 und S_5 resultieren die **Sattelpunkte** $(1, 0, -\frac{1}{e})$ und $(-1, 0, -\frac{1}{e})$.

(b) Was läßt sich über die globalen Extrema von f im Bereich $0 \leq |x|, |y| \leq 1$ aussagen?

Lösung.

Da offensichtlich $f(x, y) \geq 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt, ist $(0, 0, 0)$ ein **globales Minimum** der Funktion f. Da $f(x, y) \neq 0$ für $(x, y) \neq (0, 0)$, handelt es sich hierbei um das einzige globale Minimum.

Zur Bestimmung der lokalen Maxima muß der Rand des Gebietes $0 \leq |x|, |y| \leq 1$ untersucht werden. Das Gebiet ist ein Quadrat der Seitenlänge 2 mit Mittelpunkt im Ursprung. Die 4 Seiten des Randes werden durch $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$ und $y = -1$ beschrieben. Da die Funktion f symmetrisch bezüglich der x- und der y-Achse ist, reicht es die Fälle $x = 1$ und $y = 1$ zu untersuchen.

i. Sei $x = 1$. Einsetzen von $x = 1$ in $f(x, y)$ liefert die Hilfsfunktion $g(y) = f(1, y) = e^{-1-y^2}\left(1 + 2y^2\right)$. Gesucht sind nun die Maxima dieser Funktion im Bereich $-1 \leq y \leq 1$. Zu deren Ermittlung bestimmen wir $g'(y)$. Es ergibt sich

$$g'(y) = -2ye^{-1-y^2}\left(1 + 2y^2\right) + 4ye^{-1-y^2} = 2y\left(1 - 2y^2\right)e^{-1-y^2}.$$

Nullsetzen von $g'(y)$ liefert dann $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $y_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Aus y_1 ergibt sich der Punkt $(1, 0, -\frac{1}{e})$, der bereits oben untersucht wurde. Da $f(1, y_2) = f(1, y_3) = \frac{2}{e^{1.5}} < \frac{2}{e} = f(0, 1)$ gilt, brauchen auch die aus y_2 und y_3 resultierenden Punkte nicht weiter untersucht werden; sie kommen keinesfalls für globale Maxima in Frage.

ii. Sei $y = 1$. Einsetzen von $y = 1$ in $f(x, y)$ liefert die Hilfsfunktion $h(x) = f(x, 1) = e^{-x^2-1}\left(2 + x^2\right)$. Gesucht sind nun die Maxima dieser Funktion im Bereich $-1 \leq x \leq 1$. Zu deren Ermittlung bestimmen wir $h'(x)$. Es ergibt sich

$$h'(x) = -2xe^{-x^2-1}\left(2 + x^2\right) + 2xe^{-x^2-1} = 2xe^{-x^2-1}\left(-1 - x^2\right).$$

Nullsetzen von $g'(x)$ liefert $x = 0$. Der daraus resultierende Punkt $(0, 1, \frac{2}{e})$ wurde bereits in (a) untersucht.

Schlußendlich sind noch die 4 Eckpunkte des Quadrats zu überprüfen. Da $f(1, 1) = f(1, -1) = f(-1, -1) = f(-1, 1) = \frac{3}{e^2} < \frac{2}{e}$ gilt, liefern auch die Eckpunkte des Quadrats keine Punkte mit einem größeren Funktionswert als die Punkte S_2 und S_3. Diese lokalen Maxima sind also zugleich auch **globale Maxima**.

3. Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y, z) = \sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}$$

für $x, y, z \geq 0$. Bestimmen Sie die Extrema von f (und deren Typ) unter der Nebenbedingung $x + y + z = \pi$.

Lösung.

Da auch der Typ der Extrema gefragt ist und sich die Nebenbedingung leicht auflösen läßt, ist eine Anwendung der Langrange-Methode nicht zielführend.

Durch Auflösung der Nebenbedingung $x+y+z=\pi$ nach z erhalten wir $z=\pi-x-y$. Wir setzen nun diesen Ausdruck für z in die Funktion f ein und erhalten eine neue Funktion g, die nur noch von x und y abhängt. Es gilt

$$g(x,y)=f(x,y,\pi-x-y)=\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{y}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right).$$

Gesucht sind nun die lokalen Extrema der Funktion g. Nebenbedingungen liegen keine mehr vor. Zur Bestimmung der lokalen Extrema von g bestimmen wir die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung. Die Berechnung der Ableitungen wird erleichtert, wenn wir die Funktion g durch Anwendung der Beziehung $\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$ wie folgt umschreiben:

$$g(x,y)=\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{y}{2}\cdot\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right).$$

Für die partiellen Ableitung g_x erhält man nun

$$g_x(x,y)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)-\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)\right)\sin\frac{y}{2} \tag{1}$$

Nach dem Additionstheorem für die Cosinus-Funktion gilt $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$. Setzt man im obigen Ausdruck $\alpha=\frac{x}{2}+\frac{y}{2}$ und $\beta=\frac{x}{2}$, so läßt sich (1) wie folgt umformen

$$g_x(x,y)=\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{y}{2}\right)\cdot\sin\frac{y}{2}$$

Auf analogem Weg (oder durch Symmetrieüberlegungen) erhält man

$$g_y(x,y)=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\left(\frac{x}{2}+y\right).$$

Die Ableitungen zweiter Ordnung haben die folgende Gestalt:

$$g_{xx}(x,y)=-\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{y}{2}\right)\cdot\sin\frac{y}{2}$$

$$g_{yy}(x,y)=-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}+y\right)\cdot\sin\frac{x}{2}$$

$$g_{xy}(x,y)=\frac{1}{4}\left(\cos\frac{y}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{y}{2}\right)-\sin\frac{y}{2}\cdot\sin\left(x+\frac{y}{2}\right)\right)=\frac{1}{4}\cos\left(x+y\right).$$

Um die kritischen Punkte (=Kandidaten für lokale Extrema) zu ermitteln, setzen wir den Gradienten gleich dem Nullvektor. Es ergeben sich folgende zwei Forderungen

$$g_x(x,y)=\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{y}{2}\right)\cdot\sin\frac{y}{2}=0$$

und

$$g_y(x,y)=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\left(\frac{x}{2}+y\right)=0$$

Da ein Produkt von 2 Faktoren genau dann Null ist, wenn zumindest einer der beiden Faktoren gleich Null ist, unterscheiden wir nun 4 Fälle.

(a) $\sin\frac{x}{2}=0$ und $\sin\frac{y}{2}=0$.
Da nach Voraussetzung $0\le x,y\le\pi$ gilt, folgt $x=0$ und $y=0$.

(b) $\sin\frac{x}{2}=0$ und $\cos\left(x+\frac{y}{2}\right)=0$.
Aus $\sin\frac{x}{2}=0$ und $0\le x\le\pi$ folgt $x=0$. Einsetzen in die zweite Bedingung liefert dann zusammen mit $0\le y\le\pi$, daß $y=\pi$ gelten muß.

(c) $\sin\frac{y}{2}=0$ und $\cos\left(y+\frac{x}{2}\right)=0$.
Analoge Vorgangsweise wie im obigen Fall liefert $x=\pi$ und $y=0$. (Stattdessen kann auch über die Symmetrie argumentiert werden.)

(d) $\cos\left(x+\frac{y}{2}\right)=0$ und $\cos\left(y+\frac{x}{2}\right)=0$.
Da $x+y+z=\pi$ und $x,y,z\geq 0$ zu gelten hat, folgt $0\leq x+y\leq\pi$. Somit gilt dann auch $0\leq\frac{x}{2}+y\leq\pi$ und $0\leq\frac{y}{2}+x\leq\pi$. Daher können die obigen zwei Bedingungen nur für $\frac{x}{2}+y=\frac{\pi}{2}$ und $\frac{y}{2}+x=\frac{\pi}{2}$ erfüllt sein. Lösen dieses Gleichungssystems ergibt $x=y=\frac{\pi}{3}$.

Es gilt nun die vier kritischen Punkte $S_1=(0,0)$, $S_2=(0,\pi)$, $S_3=(\pi,0)$ und $S_4=(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$ zu untersuchen. Dazu müssen wir die Hessematrix H_g von g in diesen vier Punkten auswerten.

Es ergibt sich

$$M_1=H_g(0,0)=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & 0\end{pmatrix}\qquad M_2=H_g(\pi,0)=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$M_3=H_g(0,\pi)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & 0\end{pmatrix}\qquad M_4=H_g(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4} & -\frac{1}{8}\\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

Die Matrizen M_1, M_2 und M_3 sind indefinit (ihre Determinante ist <0). Die Matrix M_4 is negativ definit (ihre Determinate ist positiv und das Element in der ersten Zeile und Spalte ist negativ).

Somit liegt für $x=\frac{\pi}{3}$ und $y=\frac{\pi}{3}$ ein **lokales Maximum** der Funktion g vor. Setzt man in die Nebenbedingung ein, so ergibt sich $z=\frac{\pi}{3}$. Der Funktionswert an der Stelle $x=\frac{\pi}{3}$, $y=\frac{\pi}{3}$ und $z=\frac{\pi}{3}$ beträgt $\frac{1}{8}$. Der Punkt $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{1}{8})$ (4 Koordinaten!!) stellt somit ein **lokales Maximum** von f dar.

Analog ergibt sich, daß die Punkte $(0,0,\pi,0)$, $(0,\pi,0,0)$ und $(\pi,0,0,0)$ **Sattelpunkte** von f darstellen. Da $\sin u\geq 0$ für alle $u\in[0,\frac{\pi}{2}]$ gilt, folgt $f(x,y,z)\geq 0$ auf dem von uns betrachteten Bereich. Daher stellen die drei Punkte $(0,\pi,0,0)$, $(\pi,0,0,0)$ und $(0,0,\pi,0)$ alle zugleich **globale Minima** von f dar.