Tutorium Mathematik II M WM VT

SS 2009

13 März 2009 - Lösungen

2. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-2)((x-2)^2+y^2)}{x^2-4x+4+2xy-4y+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (2,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (2,0) \end{cases}.$$

Ist f im Punkt $(2,0)$ stetig?

Lösung:

f ist stetig in $(2,0)$ dann und nur dann, wenn $\lim_{(x,y)\to(2,0)} f(x,y) = f(2,0) = 0$. Wir transformieren zunächst $f(x,y)$ für $(x,y) \neq (2,0)$ wie folgt:

$$f(x,y) = \frac{(x-2)((x-2)^2+y^2)}{x^2-4x+4+2xy-4y+y^2} = \frac{(x-2)((x-2)^2+y^2)}{(x-2)^2+y(2(x-2)+y)},$$

und führen eine Variablentransformation mit $x' = x-2$, $y' = y$ durch

$$f(x,y) = \frac{x'(x'^2+y'^2)}{x'^2+y'(2x'+y')} = \frac{x'(x'^2+y'^2)}{(x'+y')^2}.$$

Wir beobachten, dass $(x,y) \to (2,0)$ dann und nur dann wenn $(x',y') \to (0,0)$ und somit

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} f(x,y) = \lim_{(x',y')\to(0,0)} \frac{x'(x'^2+y'^2)}{(x'+y')^2}.$$

Wir zeigen, dass der letzter Limes nicht gleich $f(2,0)$ ist in dem wir zwei Folgen x'_n und y'_n finden, für die $\lim_{n\to\infty} x'_n = 0$ und $\lim_{n\to\infty} y'_n = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{x'_n(x'^2_n+y'^2_n)}{(x'_n+y'_n)^2} \neq f(2,0) = 0$.

Tatschlich: sei $x'_n = \frac{1}{n}$ und $y'_n = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x'_n(x'^2_n+y'^2_n)}{(x'_n+y'_n)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2} + (\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n})^2\right)}{(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n})^2} = \lim_{n\to\infty} n^3(\frac{2}{n^2} - \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^4}) = \infty \neq 0.$$

Somit ist f nicht stetig in $(2,0)$.

3. Man berechne alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der Funktion

$$f(x,y) = x^2e^y + e^{xy}.$$

Lösung:

$$f_x(x,y) = (x^2e^y)'_x + (e^{xy})'_x = 2xe^y + ye^{xy}.$$
$$f_y(x,y) = (x^2e^y)'_y + (e^{xy})'_y = x^2e^y + xe^{xy}.$$
$$f_{xx}(x,y) = (f_x(x,y))'_x = (2xe^y)'_x + (ye^{xy})'_x = 2e^y + y^2e^{xy}.$$
$$f_{yy}(x,y) = (f_y(x,y))'_y = (x^2e^y)'_y + (xe^{xy})'_y = x^2e^y + x^2e^{xy}.$$
$$f_{xy}(x,y) = (f_x(x,y))'_y = (2xe^y)'_y + (ye^{xy})'_y = 2xe^y + e^{xy} + yxe^{xy}.$$
$$f_{yx}(x,y) = (f_y(x,y))'_x = (x^2e^y)'_x + (xe^{xy})'_x = 2xe^y + e^{xy} + xye^{xy}.$$

4. Untersuchen Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^6+y^5}{x^4+y^4} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ und die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(0,0)$ mit $a = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$. Ist f im Ursprung differenzierbar?

Lösung:

Stetigkeit.

Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $(x,y) \neq (0,0)$ ist f stetig als Quotient zweier stetigen Funktionen ($x^6 + y^5$ und $x^4 + y^4$ sind Polynome und somit stetig), wobei der Nenner $x^4 + y^4$ ungleich 0 ist.

f ist stetig im Punkt $(0,0)$ dann und nur dann, wenn $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$.

Wir untersuchen also $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Zu diesem Zweck stellen wir x und y in Polarkoordinaten $x = r\cos\phi$ und $y = r\sin\phi$ dar und beobachten, dass $(x,y) \to 0$ dann und nur dann wenn $r \to 0$. Somit gilt

$$\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{r^5(r\cos^6\phi + \sin^5\phi)}{r^4(\cos^4\phi + \sin^4\phi)} = \lim_{r\to 0} r\frac{(r\cos^6\phi + \sin^5\phi)}{(\cos^4\phi + \sin^4\phi)}$$

Wir zeigen, dass $\left|\frac{r\cos^6\phi+\sin^5\phi}{\cos^4\phi+\sin^4\phi}\right|$ für $r \leq 1$ von einer Konstanten beschränkt ist. Hierfür zeigen wir zunächst, dass $\cos^4\phi + \sin^4\phi$ nach unten durch $1/2$ beschränkt ist:

$$\cos^4\phi + \sin^4\phi = \cos^4\phi + (1-\cos^2\phi)^2 = 2\cos^4\phi - 2\cos^2\phi + 1 =$$

$$2\left(\cos^4\phi - \cos^2\phi + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} + 1 = 2\left(\cos^2\phi - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}.$$

Weiters gilt

$$\left|\frac{r\cos^6\phi + \sin^5\phi}{\cos^4\phi + \sin^4\phi}\right| = \frac{|r\cos^6\phi + \sin^5\phi|}{\cos^4\phi + \sin^4\phi} \leq \frac{|r||\cos\phi|^6 + |\sin\phi|^5}{1/2} = \frac{1+1}{1/2} = 4\,, \text{ falls } r \leq 1.$$

Daraus folgt

$$\left|r\frac{(r\cos^6\phi + \sin^5\phi)}{(\cos^4\phi + \sin^4\phi)}\right| \leq 4r$$

und somit $\lim_{r\to 0} r\frac{(r\cos^6\phi+\sin^5\phi)}{(\cos^4\phi+\sin^4\phi)} = 0 = f(0,0)$.

Die Funktion f ist also auch im Punkt $(0,0)$ und somit überall in seinem Definitionsbereich $\mathbb{R}^2$ stetig.

Die partiellen Ableitungen.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^6/h^4}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0\,.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^5/h^4}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1\,.$$

Die Richtungsableitung.

$$\frac{\partial f}{\partial(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+\frac{1}{\sqrt{2}}h,0+\frac{1}{\sqrt{2}}h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^6+\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^5}{\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^4+\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^4}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\left(\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{h}{\sqrt{2}}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{h}{4}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\,.$$

Differenzierbarkeit in $(0,0)$.

f ist (total) differenzierbar in $(0,0)$ dann und nur dann, wenn

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\langle grad(f(0,0)),(x,y)^T\rangle}{||(x,y)^T||}=0\,.$$

Werden im obigen Limes $f(0,0)=0$ und $grad(f(0,0))=(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\frac{\partial f}{\partial y}(0,0))^T=(0,1)^T$ eingesetzt so erhält man folgende hinreichende uns notwendige Bedingung für die (totale) Differenzierbarkeit von f in $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{x^6+y^5}{x^4+y^4}-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^6+y^5-yx^4-y^5}{(x^4+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}=0\,.$$

Wir zeigen, dass die letzte Gleichung nicht stimmt und somit dass f in $(0,0)$ nicht differenzierbar ist. Dafür wählen wir $x_n=y_n=\frac{1}{n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, sodass $(x_n,y_n)\to(0,0)$ für $n\to\infty$, und zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(1/n,1/n)-1/n}{\sqrt{(1/n)^2+(1/n)^2}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\neq 0\,.$$

Tatsächlich:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(1/n,1/n)-1/n}{\sqrt{(1/n)^2+(1/n)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^6}+\frac{1}{n^5}-\frac{1}{n^5}-\frac{1}{n^5}}{(\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^4})\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^5}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{n^6}-\frac{1}{n^5}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}n}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\,.$$