Tutorium Mathematik II M WM VT SS 2009 - Lösungen

6. März 2009

2. Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung.

Das charakteristische Polynom von A kann durch die Entwicklung der zweiten Zeile der Matrix berechnet werden:

$$\left| \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 7 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 7 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \right| = (1-\lambda)[(3-\lambda)^2-49) = (1-\lambda)*(\lambda^2-6\lambda-40) = (1-\lambda)\,(10-\lambda)\,(-4-\lambda)\,,$$

sodass A drei jeweils einfache Eigenwerte 1, 10 und -4 hat.

Wir bestimmen nun die Eigenräume zu den drei Eigenwerten.

Der Eigenraum zu $\lambda_1 = 1$ ist der Raum der Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Die Matrix des Gleichungssystems wird folgendermaßen transformiert:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -\frac{45}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die zweite Zeile der Matrix impliziert $-\frac{45}{2}z = 0$ und somit $z = 0$. Die erste Zeile der Matrix impliziert $7x+2z = 0$ und somit $7x+2\cdot 0 = 0$ und weiter $x = 0$. Die Variable y nimmt jeden beliebigen reellen Wert an: $y = t \in \mathbb{R}$. Somit ist der Eigenraum zu $\lambda_1 = 1$ als $\{(0,t,0)^T : t \in \mathbb{R}\}$ gegeben.

Analog bestimmen wir die Eigenräume zu den anderen zwei Eigenwerten $\lambda_2 = 10$ und $\lambda_3 = -4$.

Der Eigenraum zu $\lambda_1 = 10$ ist der Raum der Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} -7 & 0 & 7 \\ 0 & -9 & 0 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Die Matrix des Gleichungssystems wird folgendermaßen transformiert:

$$\begin{pmatrix} -7 & 0 & 7 \\ 0 & -9 & 0 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -7 & 0 & 7 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die zweite Zeile der Matrix impliziert $9y = 0$ und somit $y = 0$. Die erste Zeile der Matrix impliziert $-7x + 7z = 0$ und somit $x = z$. Die Variable z nimmt jeden beliebigen reellen Wert an: $z = t \in \mathbb{R}$. Somit ist der Eigenraum zu $\lambda_1 = 1$ als $\{(t,0,t)^T : t \in \mathbb{R}\}$ gegeben.

Der Eigenraum zu $\lambda_1 = -4$ ist der Raum der Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Die Matrix des Gleichungssystems wird folgendermaßen transformiert:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die zweite Zeile der Matrix impliziert $5y = 0$ und somit $y = 0$. Die erste Zeile der Matrix impliziert $7x + 7z = 0$ und somit $x = -z$. Die Variable z nimmt jeden beliebigen reellen Wert an: $z = t \in \mathbb{R}$. Somit ist der Eigenraum zu $\lambda_1 = 1$ als $\{(-t, 0, t)^T : t \in \mathbb{R}\}$ gegeben.

3. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der gegebenen Matrix A in Abhängigkeit vom Parameter t.

$$A = \begin{pmatrix} 23 & 0 & 19 \\ 0 & t & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Lösung.

Zuerst berechnen wir die Eigenwerte der Matrix als Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\left| \begin{pmatrix} 23-\lambda & 0 & 19 \\ 0 & t-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

Die Determinante der Matrix wird durch Entwicklung der zweiten Zeile berehcnet:

$$\left| \begin{pmatrix} 23-\lambda & 0 & 19 \\ 0 & t-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix} \right| = (t-\lambda)((23-\lambda)(5-\lambda)-19) = (t-\lambda)(\lambda^2-28\lambda+96) = (t-\lambda)(t-24)(t-4)$$

Die Eigenwerte der Matrix sind somit $\lambda_1 = t$, $\lambda_2 = 24$ und $\lambda_3 = 4$.

Nun berechnen wir die Eigenräume zu den drei Eigenwerten.

Der Eigenraum zu $\lambda_1 = t$ ist der Raum der Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 23-t & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

Die Matrix des Gleichungssystems wird folgendermaßen transformiert:

$$\begin{pmatrix} 23-t & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5-t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5-t \\ 23-t & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5-t \\ 0 & 0 & 19-(23-t)(5-t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5-t \\ 0 & 0 & -(t-24)(t-4) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die zweite Zeile impliziert $(t-24)(t-4)z = 0$ was wiederum $t = 24$ oder $t = 4$ oder $z = 0$ impliziert.

Fall I: $t \neq 24$ und $t \neq 4$.

Dann gilt $z = 0$ und die erste Zeile der obigen Matrix impliziert $x + (5 - t)z = 0$ was wiederum $x = 0$ impliziert. y nimmt jeden beliebigen reellen Wert an: $y = t \in \mathbb{R}$. Der Eigenraum zu $\lambda_1 = t$ ist in diesem Fall $\{(0, t, 0)^T : t \in \mathbb{R}\}$.

Fall II: $t = 24$. Die Matrix des homogenen Gleichungssystems lautet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die erste Zeile impliziert $x - 19z = 0$ und somit $x = 19z$. y und z nehmen jeden beliebigen reellen Wert an. Der Eigenraum zu $\lambda_1 = t$ ist in diesem Fall $\{(19t, s, t)^T : t, s \in \mathbb{R}\} = \{t(19, 0, 1)^T + s(0, 1, 0)^T : s, t \in \mathbb{R}\}$.

Fall III: $t = 4$. Die Matrix des homogenen Gleichungssystems lautet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die erste Zeile impliziert $x + z = 0$ und somit $x = -z$. y und z nehmen jeden beliebigen reellen Wert an. Der Eigenraum zu $\lambda_1 = t$ ist in diesem Fall $\{(-t, s, t)^T : t, s \in \mathbb{R}\} = \{t(-1, 0, 1)^T + s(0, 1, 0)^T : s, t \in \mathbb{R}\}$.

Der Eigenraum zu $\lambda_2 = 24$ ist der Raum der Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 23 - 24 & 0 & 19 \\ 0 & t - 24 & 0 \\ 1 & 0 & 5 - 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

Die Matrix des Gleichungssystems wird folgendermaßen transformiert:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 19 \\ 0 & t - 24 & 0 \\ 1 & 0 & -19 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 19 \\ 0 & t - 24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die zweite Zeile impliziert $(t - 24)y = 0$ was wiederum $t = 24$ oder $y = 0$ impliziert.

Fall I: $t \neq 24$.

Dann gilt $y = 0$ und die erste Zeile der obigen Matrix impliziert $-x + 19z = 0$ was wiederum $x = 19z$ impliziert. z nimmt jeden beliebigen reellen Wert an: $z = t \in \mathbb{R}$. Der Eigenraum zu $\lambda_2 = 24$ ist in diesem Fall $\{(19t, 0, t)^T : t \in \mathbb{R}\}$.

Fall II: $t = 24$. Die Matrix des homogenen Gleichungssystems lautet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die erste Zeile impliziert $-x + 19z = 0$ und somit $x = 19z$. y und z nehmen jeden beliebigen Wert an. Der Eigenraum zu $\lambda_2 = 24$ ist in diesem Fall $\{(19t, s, t)^T : t, s \in \mathbb{R}\} = \{t(19, 0, 1)^T + s(0, 1, 0)^T : s, t \in \mathbb{R}\}$.

Der Eigenraum zu $\lambda_3 = 4$ ist der Raum der Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 23 - 4 & 0 & 19 \\ 0 & t - 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 - 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

Die Matrix des Gleichungssystems wird folgendermaßen transformiert:

$$\begin{pmatrix} 19 & 0 & 19 \\ 0 & t-4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 19 & 0 & 19 \\ 0 & t-4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die zweite Zeile impliziert $(t-4)y = 0$ was wiederum $t = 4$ oder $y = 0$ impliziert.

Fall I: $t \neq 4$.

Dann gilt $y = 0$ und die erste Zeile der obigen Matrix impliziert $19x + 19z = 0$ was wiederum $x = -z$ impliziert. z nimmt jeden beliebigen reellen Wert an: $z = t \in \mathbb{R}$. Der Eigenraum zu $\lambda_3 = 4$ ist in diesem Fall $\{(-t, 0, t)^T : t \in \mathbb{R}\}$.

Fall II: $t = 4$. Die Matrix des homogenen Gleichungssystems lautet:

$$\begin{pmatrix} 19 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die erste Zeile impliziert $19x + 19z = 0$ und somit $x = -z$. y und z nehmen jeden beliebigen Wert an. Der Eigenraum zu $\lambda_3 = 4$ ist in diesem Fall $\{(-t, s, t)^T : t, s \in \mathbb{R}\} = \{t(-1, 0, 1)^T + s(0, 1, 0)^T : s, t \in \mathbb{R}\}$.

Zusammenfassung:

Eigenraum zu $\lambda_1 = t$: $\{(0, t, 0)^T : t \in \mathbb{R}\}$ für $t \neq 24$ und $t \neq 4$;
$\{t(19, 0, 1)^T + s(0, 1, 0)^T : s, t \in \mathbb{R}\}$ für $t = 24$;
$\{t(-1, 0, 1)^T + s(0, 1, 0)^T : s, t \in \mathbb{R}\}$ für $t = 24$.

Eigenraum zu $\lambda_2 = 24$: $\{19(t, 0, t)^T : t \in \mathbb{R}\}$ für $t \neq 24$;
$\{t(19, 0, 1)^T + s(0, 1, 0)^T : s, t \in \mathbb{R}\}$ für $t = 24$.

Eigenraum zu $\lambda_3 = 4$: $\{(-t, 0, t)^T : t \in \mathbb{R}\}$ für $t \neq 4$;
$\{t(-1, 0, 1)^T + s(0, 1, 0)^T : s, t \in \mathbb{R}\}$ für $t = 4$.