Tutorium Mathematik II M WM VT SS 2009 - Lösungen

27. Februar 2009

2. Gibt es eine lineare Abbildung $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

   (b)
$$\phi\Big((1,3)^T\Big) = (2,1)^T, \phi\Big((2,0)^T\Big) = (1,1)^T, \phi\Big((5,3)^T\Big) = (4,3)^T$$

   Lösung:

   Da $(5,3)^T = (1,3)^T + 2(2,0)^T$ muss für eine lineare Abbildung ϕ folgende Gleichung gelten:
$$\phi((5,3)^T) = \phi((1,3)^T) + \phi(2(2,0)^T),$$
   was in unserem Fall $(4,3)^T = (2,1)^T + 2(1,1)^T$ impliziert. Die letzte Gleichung ist offensichtlich erfüllt. Weiters sind $(1,3)^T$ und $(2,0)^T$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^2$ und bilden somit eine Basis von $\mathbb{R}^2$. D.h. wir können eine lineare Abbildung ϕ konstruieren die $(1,3)^T$ und $(2,0)^T$ auf $(2,1)^T$ bzw. $(1,1)^T$ abbildet und $\forall v = \alpha((1,3)^T) + \beta((2,0)^T) \in \mathbb{R}^2$ folgendermaßen gegeben ist:
$$\phi(v) = \alpha(\phi((1,3)^T) + \beta\phi((2,0)^T) = \alpha(2,1)^T + \beta(1,1)^T.$$
   Diese Abbildung erfüllt klarerweise die Gleichungen aus der Angabe. Also, ja, es gibt eine lineare Abbildung, die die Gleichungen der Angabe erfüllt.

3. Gegeben sei eine Abbildung $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\phi(v) = Av + u$ wobei $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ ein gegebener Vektor in $\mathbb{R}^3$ ist und A folgendermaßen gegeben ist:
$$A = \begin{pmatrix} 4 & t & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{für ein Parameter } t \in \mathbb{R}.$$
   Für welche Werte von t, u_1, u_2, u_3 ist ϕ eine lineare Abbidlung? Für welche Werte von t, u_1, u_2, u_3 ist ϕ injektiv, surjektiv, bijektiv? Bestimmen Sie die Dimensionen von Kern und Bild von ϕ in Abhängigkeit von t und u.

   Lösung:

   Linearität: Fall ϕ linear dann muss $0 = \phi(0) = A0 + u = u$, also $u = 0$, d.h. $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ gelten. Falls $u = 0$ dann ist ϕ als $\phi(v) = Av$ gegeben und ist somit additiv und homogen für alle reellen Werte von t :
$$\phi(v_1 + v_2) = A(v_1 + v_2) = av_1 + Av_2 = \phi(v_1) + \phi(v_2),\ \forall v_1, v_3 \in \mathbb{R}^3$$
$$\phi(\lambda v_1) = A(\lambda v_1) = \lambda A v_1 = \lambda\phi(v_1),\ \forall\lambda \in \mathbb{R}, \forall v_1 \in \mathbb{R}^3.$$
   Also ϕ ist linear genau dann, wenn $u = 0 \in \mathbb{R}^3$ und $t \in \mathbb{R}$ beliebig.

   Injetivität, Surjektivität, Bijektivität:

   Fall (i): $u = 0$.

   $\phi(v) = Av$ ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3$ auf $\mathbb{R}^3$. Fr̈ eine solche Abbildung sind Injektivität, Surjektivität und Bijektivität äquivalent und ϕ ist genau dann injektiv (surjektiv,bijektiv), wenn $Ker(\phi) = \{0\}$. Wir bestimmen nur $Ker(\phi)$ und lösen dafür das homogene lineare Gleichungssystem $Av = 0$. Wir transformieren A in Zeilennormalform:
$$\begin{pmatrix} 4 & t & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & t & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & t-8 & 2 \end{pmatrix}$$

Für $t = 8$ erkennen wir bei der letzten Matrix, dass sie vollen Rang hat und das homogene lineare Gleichungssystem besitzt somit nur die 0-Lösung. Daraus folgt $Ker(\phi) = \{0\}$ und ϕ injektiv (surjektiv, bijektiv).

Für $t \neq 8$ transfomieren wir die Matrix weiter:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2+(t-8) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & t-6 \end{pmatrix}$$

Für $t \neq 6$ hat die letzte Matrix vollen Rang und das homogene lineare Gleichungssystem besitzt somit nur die 0-Lösung. Daraus folgt $Ker(\phi) = \{0\}$ und ϕ injektiv (surjektiv, bijektiv).

Für $t = 6$ ist der Rang der letzten Matrix gleich 2 und das homogene lineare Gleichungssystem besitzt unendlich viele Lösungen der Form $\{s(-5,3,1)^T : s \in \mathbb{R}\}$. Es gilt also $Ker(\phi) = \{s(-5,3,1)^T : s \in \mathbb{R}\} \neq \{0\}$ und ϕ ist daher nicht injektiv (surjektiv,bijektiv).

Fall (ii): $u \neq 0$. Sei $\phi_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v \mapsto Av$. ϕ ist genau dann injektiv (surjektiv, bijektiv) wenn ϕ_1 injektiv (surjektiv, bijektiv). Es folgt also aus Fall (i), dass ϕ injektiv (surjektiv, bijektiv) genau dann ist, wenn $t \neq 6$.

Dimensionen von Kern und Bild:

Fall (i): $u = 0$.

Für $t \neq 6$ gilt $Ker(\phi) = \{0\}$ (siehe oben) und somit $dim(Ker(\phi)) = 0$ und $dim(Im(\phi)) = 3 - dim(Ker(\phi)) = 3$.

Für $t = 6$ gilt $Ker(\phi) = \{s(-5,3,1)^T : s \in \mathbb{R}\}$ (siehe oben) und somit $dim(Ker(\phi)) = 1$ und $dim(Im(\phi)) = 3 - dim(Ker(\phi)) = 2$.

Fall (ii): $u \neq 0$.

$Ker(\phi) = \{v \in \mathbb{R}^3 : Av + u = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^3 : Av = -u\}$. Sei $v_0 \in \mathbb{R}^3$ ein Vektor aus $Ker(\phi)$. Es gilt dann $Ker(\phi) = Ker(\phi_1) + v_0$ wobei ϕ_1 die oben definierte lineare Abbildung ist und die Summe in der letzten Gleichung als $\{v' + v_0 : v' \in Ker(\phi_1)\}$ zu verstehen ist. D.h. $Ker(\phi)$ ist in diesem Fall ein affiner Raum dessen zugrundeliegender Vektorraum $Ker(\phi_1)$ ist. Daher gilt $dim(Ker(\phi)) = \dim(Ker(\phi_1))$ und somit: $dim(Ker(\phi)) = 0$ für $t \neq 6$ und $dim(Ker(\phi)) = 1$ für $t = 6$.

Analog gilt $Im(\phi) = \{Av + u : v \in \mathbb{R}^3\} = \{Av : v \in \mathbb{R}^3\} + u = Im(\phi_1) + u$ und daher $dim(Im(\phi)) = dim(Im(\phi_1))$ was zusammen mit dem Ergebnis von Fall (i) folgendes impliziert: $dim(Im(\phi)) = 3$ falls $t \neq 6$ und $dim(Im(\phi)) = 2$ falls $t = 6$.

4. Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ versehen mit dem üblichen kartesischen Koordinatensystem. Sei ϕ jene Abbildung in $\mathbb{R}^3$, die jeden Punkt $v \in \mathbb{R}^3$ an der Ebene $2x + z = y$ spiegelt.

   (a) Sei $v = (v_1, v_2, v_3)^T \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Geben Sie $\phi(v)$ explizit an. Ist ϕ eine lineare Abbildung?

   (b) Bestimmen Sie die Dimensionen von Kern und Bild der Abbildung ϕ. Ist ϕ bijektiv?

   Lösung:

   (a) Sei (v_1, v_2, v_3) ein Punkt P in $\mathbb{R}^3$. Wir bestimmen zunächst wo dieser Punkt durch die gegebene Spiegelung abgebildet wird. Sei n der Normalvektor zur Ebene $2x + z = y$: $n = (2, -1, 1)^T$. Die Gleichung der Geraden g, die durch den Punkt P parallel zur n verläuft, ist gegeben als $(v_1, v_2, v_3)^t + t(n_1, n_2, n_3)^T = (v_1 + 2t, v_2 - t, v_3 + t)^T$, $t \in \mathbb{R}$. Die Koordinaten des Schnittpunktes S dieser Geraden mit der gegebenen Ebene lassen sich durch Einsetzten der Koordinaten der Punkte aus der Geraden in der Gleichung der Ebene:

   $$2(v_1 + 2t) + v_3 + t = v_2 - t \Longrightarrow t = (v_2 - v_3 - 2v_1)/6$$

   Die Koordinaten des Vektors $\vec{PS}$ sind somit $\frac{v_2 - v_3 - 2v_1}{6}(2, -1, 1)^T$. Sei P' das Spiegelbild von P. P' liegt auf der Geraden g und is symmetrisch zu P bzgl. S. Somit sind die Koordinaten von P' als $(v_1, v_2, v_3)^T + 2\frac{v_2-v_3-2v_1}{6}(2,-1,1)^T$. Da die Ebene $2x+z=y$ durch den Ursprung verläuft wird der Ursprung durch die untersuchte Spiegelung auf sich selbst gebildet. Somit wird ein Vektor v mit Koordinaten v_1, v_2, v_3 auf einen Vektor mit Koordinaten $(v_1, v_2, v_3)^T + 2\frac{v_2-v_3-2v_1}{6}(2,-1,1)^T = \frac{1}{3}(-v_1+2v_2-2v_3, 2v_1+2v_2+v_3, -2v_1+v_2+2v_3)^T = Av$ wobei

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Die Spiegelung an der Geraden $2x+z=y$ ist also die Abbildung $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, sodass $\phi(v) = Av$, und ist somit linear.

(b) Ähnlich wie in Beispiel 3 bringen wir die Matrix A in Zeilennormalform:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Die letzte Matrix hat vollen Rang und das homogene lineare Gleichungssystem $Av = 0$ besitzt somit nur die 0-Lösung. Daraus folgt $Ker(\phi) = \{0\}$ und ϕ ist injektiv (surjektiv, bijektiv).