Int. Bsp. 3 26.6.09

lokale Extrema von

$f(x,y) = x+y$

u d NB $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=a^2$

$x \neq 0,\ y \neq 0 \quad \frac{1}{x^2} < a^2 \Rightarrow x > \frac{1}{a^2} \Rightarrow x \in (\frac{1}{a},+\infty) \cup (-\infty,\frac{1}{a})$

$\frac{1}{y^2} = a^2 - \frac{1}{x^2} = \frac{a^2x^2-1}{x^2}$ Da $x > \frac{1}{a^2}$ ist $a^2x^2-1>0$

Daher $y^2 = \frac{x^2}{a^2x^2-1} \Rightarrow y = \pm \frac{x}{\sqrt{a^2x^2-1}}$

Fall I $y = \frac{x}{\sqrt{a^2x^2-1}} \Rightarrow f(x) = x+y = x + \frac{x}{\sqrt{a^2x^2-1}}$ für $x \in (-\infty,-\frac{1}{a}) \cup (\frac{1}{a},+\infty)$

$$f'(x) = 1 + \frac{\sqrt{a^2x^2-1} - x\frac{2a^2x}{2\sqrt{a^2x^2-1}}}{a^2x^2-1} = 1 - \frac{1}{(a^2x^2-1)^{3/2}}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow (a^2x^2-1)^{3/2} = 1 \Leftrightarrow a^2x^2-1=1 \Leftrightarrow$$
$$x^2 = \frac{2}{a^2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{a}$$

$$f''(x) = \left(-(a^2x^2-1)^{-3/2}\right)' = \frac{3}{2}(a^2x^2-1)^{-5/2}\, 2a^2x$$

$\mathrm{sgn}(f''(x)) = \mathrm{sgn}(x)$ d.h. $f''(\frac{\sqrt{2}}{a})>0$ und $f''(-\frac{\sqrt{2}}{a})<0$

d.h. $\frac{\sqrt{2}}{a}$ ist lok. Minimum und $-\frac{\sqrt{2}}{a}$ ist ein lokales Maximum.

$$x=\frac{\sqrt{2}}{a} \Rightarrow y=\frac{\sqrt{2}/a}{\sqrt{a^2\cdot\frac{2}{a^2}-1}}=\frac{\sqrt{2}}{a} \qquad P_1=\left(\frac{\sqrt{2}}{a},\frac{\sqrt{2}}{a}\right)$$

$$x=-\frac{\sqrt{2}}{a} \Rightarrow y=\frac{-\sqrt{2}/a}{\sqrt{a^2\frac{2}{a^2}-1}}=-\frac{\sqrt{2}}{a} \qquad P_2=\left(-\frac{\sqrt{2}}{a},-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)$$

P_1 ist ein lokales Minimum.

P_2 ist ein lokales Maximum

Fall II $\qquad y=-\frac{x}{\sqrt{a^2x^2-1}}$

$$f(x,y)=x+y=x-\frac{x}{\sqrt{a^2x^2-1}}$$

$$f'(x)=1-\frac{\sqrt{a^2x^2-1}-x\,\frac{\cancel{2}a^2x}{\cancel{2}\sqrt{a^2x^2-1}}}{a^2x^2-1}=$$

$$=1-\frac{a^2x^2-1-a^2x^2}{(a^2x^2-1)^{3/2}}=1+\frac{1}{(a^2x^2-1)^{3/2}}>1$$

D.h. $f'(x)\neq 0$ und es gibt keine lokalen Extrema in diesem Fall.

Zusammenfassung: $P_1=\left(\frac{\sqrt{2}}{a},\frac{\sqrt{2}}{a}\right)$ ist ein lokales Minimum

$P_2=\left(-\frac{\sqrt{2}}{a},\frac{\sqrt{2}}{a}\right)$ ist ein lokales Maximum.