

Int. Bsp. 3 26.6.09

lokale Extrema von

$$f(x,y) = x+y$$

und NB $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = a^2$

$$x \neq 0, y \neq 0 \quad \frac{1}{x^2} < a^2 \Rightarrow x > \frac{1}{a^2} \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{a^2}, +\infty\right) \cup \left(-\infty, -\frac{1}{a^2}\right)$$

$$\frac{1}{y^2} = a^2 - \frac{1}{x^2} = \frac{a^2 x^2 - 1}{x^2} \quad \text{Da } x > \frac{1}{a^2} \text{ ist } a^2 x^2 - 1 > 0$$

Daher $y^2 = \frac{x^2}{a^2 x^2 - 1} \Rightarrow y = \pm \frac{x}{\sqrt{a^2 x^2 - 1}}$

Fall I $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 x^2 - 1}} \Rightarrow f(x) = x+y = x + \frac{x}{\sqrt{a^2 x^2 - 1}}$ für $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{a^2}\right) \cup \left(\frac{1}{a^2}, +\infty\right)$

$$f'(x) = 1 + \frac{\sqrt{a^2 x^2 - 1} - x \frac{2a^2 x}{2\sqrt{a^2 x^2 - 1}}}{a^2 x^2 - 1} = 1 - \frac{1}{(a^2 x^2 - 1)^{3/2}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (a^2 x^2 - 1)^{3/2} = 1 \Leftrightarrow a^2 x^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow$$

$$x^2 = \frac{2}{a^2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{a}$$

$$f''(x) = \left(- (a^2 x^2 - 1)^{-3/2}\right)' = \frac{3}{2} (a^2 x^2 - 1)^{-5/2} \cdot 2ax = \frac{3ax}{(a^2 x^2 - 1)^{5/2}}$$

$\text{sgn}(f''(x)) = \text{sgn}(x)$ d.h. $f''\left(\frac{\sqrt{2}}{a}\right) > 0$ und $f''\left(-\frac{\sqrt{2}}{a}\right) < 0$

d.h. $\frac{\sqrt{2}}{a}$ ist lok. Minimum und $-\frac{\sqrt{2}}{a}$ ist ein lokales Maximum.

$$x = \frac{\sqrt{2}}{a} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}/a}{\sqrt{a^2 \cdot \frac{2}{a^2} - 1}} = \frac{\sqrt{2}}{a}$$

$$P_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{a}, \frac{\sqrt{2}}{a} \right)$$

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{a} \Rightarrow y = \frac{-\sqrt{2}/a}{\sqrt{a^2 \cdot \frac{2}{a^2} - 1}} = -\frac{\sqrt{2}}{a}$$

$$P_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{a}, -\frac{\sqrt{2}}{a} \right)$$

P_1 ist ein lokales Minimum.

P_2 ist ein lokales Maximum.

Fall II $y = -\frac{x}{\sqrt{a^2 x^2 - 1}}$

$$f(x, y) = x + y = x - \frac{x}{\sqrt{a^2 x^2 - 1}}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{\sqrt{a^2 x^2 - 1} - x \cdot \frac{2a^2 x}{2\sqrt{a^2 x^2 - 1}}}{a^2 x^2 - 1} =$$

$$= 1 - \frac{a^2 x^2 - 1 - a^2 x^2}{(a^2 x^2 - 1)^{3/2}} = 1 + \frac{1}{(a^2 x^2 - 1)^{3/2}} \geq 1$$

D.h. $f'(x) \neq 0$ und es gibt keine lokalen Extrema in diesem Fall.

Zusammenfassung: $P_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{a}, \frac{\sqrt{2}}{a} \right)$ ist ein lokales Minimum

$P_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{a}, -\frac{\sqrt{2}}{a} \right)$ ist ein lokales Maximum.