Tutorium Mathematik II M WM VT SS 2009

27. Februar 2009

1. Ist folgende Abbildung linear?

$$\phi_1 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \phi_1((v_1, v_2, v_3)^T) = (v_1, -v_1^2 v_2, v_2 - v_1)^T$$

2. Gibt es eine lineare Abbildung $\phi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

   (a)
$$\phi\Big((2,3)^T\Big) = (2,2)^T, \phi\Big((2,0)^T\Big) = (1,1)^T, \phi\Big((6,3)^T\Big) = (4,3)^T$$

   bzw.

   (b)
$$\phi\Big((1,3)^T\Big) = (2,1)^T, \phi\Big((2,0)^T\Big) = (1,1)^T, \phi\Big((5,3)^T\Big) = (4,3)^T$$

3. Gegeben sei eine Abbildung $\phi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\phi(v) = Av + u$ wobei $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ ein gegebener Vektor in $\mathbb{R}^3$ ist und A folgendermaßen gegeben ist:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & t & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{für ein Parameter } t \in \mathbb{R}.$$

   Für welche Werte von t, u_1, u_2, u_3 ist ϕ eine lineare Abbidlung? Für welche Werte von t, u_1, u_2, u_3 ist ϕ injektiv, surjektiv, bijektiv? Bestimmen Sie die Dimensionen von Kern und Bild von ϕ in Abhängigkeit von t und u.

4. Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ versehen mit dem üblichen kartesischen Koordinatensystem. Sei ϕ jene Abbildung in $\mathbb{R}^3$, die jeden Punkt $v \in \mathbb{R}^3$ an der Ebene $2x + z = y$ spiegelt.

   (a) Sei $v = (v_1, v_2, v_3)^T \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Geben Sie $\phi(v)$ explizit an. Ist ϕ eine lineare Abbildung?

   (b) Bestimmen Sie die Dimensionen von Kern und Bild der Abbildung ϕ. Ist ϕ bijektiv?