

1. Ist folgende Abbildung linear?

$$\phi_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \phi_1((v_1, v_2, v_3)^T) = (v_1, -v_1^2 v_2, v_2 - v_1)^T$$

2. Gibt es eine lineare Abbildung $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

(a)

$$\phi((2, 3)^T) = (2, 2)^T, \phi((2, 0)^T) = (1, 1)^T, \phi((6, 3)^T) = (4, 3)^T$$

bzw.

(b)

$$\phi((1, 3)^T) = (2, 1)^T, \phi((2, 0)^T) = (1, 1)^T, \phi((5, 3)^T) = (4, 3)^T$$

3. Gegeben sei eine Abbildung $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\phi(v) = Av + u$ wobei $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ ein gegebener Vektor in \mathbb{R}^3 ist und A folgendermaßen gegeben ist:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & t & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{für ein Parameter } t \in \mathbb{R}.$$

Für welche Werte von t, u_1, u_2, u_3 ist ϕ eine lineare Abbildung? Für welche Werte von t, u_1, u_2, u_3 ist ϕ injektiv, surjektiv, bijektiv? Bestimmen Sie die Dimensionen von Kern und Bild von ϕ in Abhängigkeit von t und u .

4. Wir betrachten \mathbb{R}^3 versehen mit dem üblichen kartesischen Koordinatensystem. Sei ϕ jene Abbildung in \mathbb{R}^3 , die jeden Punkt $v \in \mathbb{R}^3$ an der Ebene $2x + z = y$ spiegelt.

(a) Sei $v = (v_1, v_2, v_3)^T \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Geben Sie $\phi(v)$ explizit an. Ist ϕ eine lineare Abbildung?

(b) Bestimmen Sie die Dimensionen von Kern und Bild der Abbildung ϕ . Ist ϕ bijektiv?