

Elliptische Verteilungen und Portfoliooptimierung

Ein Investor möchte in d (risikoreichen) Assets investieren. Sei $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)^T$ der Zufallsvektor der Asset>Returns mit $E(X) = \mu$ und $Cov(X) = \Sigma$.

Sei \mathcal{P} die Klasse aller Portfolios bestehend aus den obigen d Aktien.

Jedes (long-short) Portfolio aus \mathcal{P} ist eindeutig durch den Gewichtsvektor $w = (w_i) \in \mathbb{R}^d$ definiert. $w_i > 0$ entspricht einer Long-Investition und $w_i < 0$ entspricht einer Short-Investition. Daher:

$$\mathcal{P} = \left\{ w = (w_i) \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^d |w_i| = 1 \right\}$$

Die Portfoliorendite ist die Zufallsvariable $Z(w) = \sum_{i=1}^d w_i X_i$.

Die erwartete Portfoliorendite: $E(Z(w)) = w^T \mu$.

Es gelte $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$ mit $E(X_k^2) < \infty$ und $\Sigma = cov(X)$.

Sei \mathcal{P}_m die Klasse jener PF aus \mathcal{P} sodass $E(Z(w)) = m$, $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$.

$$\mathcal{P}_m = \left\{ w = (w_i) \in \mathbb{R}^d, \sum_{i=1}^d |w_i| = 1, w^T \mu = m \right\}$$

Das Mean-Variance PF-Opt.modell (Markowitz 1952, 1987) lautet

$$\min_{w \in \mathcal{P}_m} \text{var}(Z(w)) \quad (1)$$

oder äquivalent (siehe zB. Campbell et al. (1997))

$$\begin{aligned} & \min_w w^T \Sigma w \\ & \text{sodass} \\ & w^T \mu = m \\ & \sum_{i=1}^d |w_i| = 1 \end{aligned}$$

Sei ρ ein Risikomaß. Das **Mean- ρ PF-Optimierungsmodell** lautet:

$$\min_{w \in \mathcal{P}_m} \rho(Z(w)) \quad (2)$$

Sei $\rho = \text{VaR}_\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$. Das **Mean-VaR PF-Optimierungsmodell** lautet:

$$\min_{w \in \mathcal{P}_m} \text{VaR}_\alpha(Z(w)) \quad (3)$$

Frage: Wie hängen die Probleme (1) und (2) (insbesondere (3)) zusammen?

Theorem 7 Sei M die Menge der erwarteten Rendite der Portfolii aus \mathcal{P} . Die Risikofaktoren, d.h. die Rendite der einzelnen Aktien seien elliptisch verteilt, $X = (X_1, X_2, \dots, X_d) \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$ für gegebene $\mu \in \mathbb{R}^d$, $\sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ und $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. VaR_α ist kohärent auf M , für jedes $\alpha \in (0.5, 1)$.

Theorem 8 (Embrechts et al., 2002)

Sei $X = (X_1, X_2, \dots, X_d) = \mu + AY$ elliptisch verteilt mit $\mu \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$, und einem sphärisch verteilten Zufallsvektor $Y \sim S_k(\psi)$ und $0 < E(X_k^2) < \infty$, $\forall k$. Sei ρ ein Risikomaß, das die Eigenschaften (C1) und (C3) besitzt, und $\rho(Y_1) > 0$ erfüllt, wobei Y_1 die erste Komponente des sphärisch verteilten Zufallsvektors Y ist.

Es gilt dann:

$$\arg \min \{ \rho(Z(w)) : w \in \mathcal{P}_m \} = \arg \min \{ \text{var}(Z(w)) : w \in \mathcal{P}_m \}$$

Einführung in Copulas: Grundlegende Eigenschaften

Definition 8 Eine d -dimensionale Copula ist eine Verteilungsfunktion auf $[0, 1]^d$ deren Randverteilungen jeweils standard gleichverteilt auf $[0, 1]$ sind.

Oder äquivalent:

Eine Copula C ist eine Funktion $C: [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$, die folgende Eigenschaften hat:

1. $C(u_1, u_2, \dots, u_d)$ ist mon. steigend in jeder Variable u_i , $1 \leq i \leq d$.
2. $C(1, 1, \dots, 1, u_k, 1, \dots, 1) = u_k$ für jedes $k \in \{1, \dots, d\}$, $u_k \in [0, 1]$.
3. Folgende Ungleichung (sogenannte Rechtecksungleichung) gilt für alle $(a_1, a_2, \dots, a_d), (b_1, b_2, \dots, b_d) \in [0, 1]^d$ mit $a_k \leq b_k, \forall k \in \{1, 2, \dots, d\}$:

$$\sum_{k_1=1}^2 \dots \sum_{k_d=1}^2 (-1)^{k_1+k_2+\dots+k_d} C(u_{1k_1}, u_{2k_2}, \dots, u_{dk_d}) \geq 0$$

wobei $u_{j1} = a_j$ und $u_{j2} = b_j$.

Anmerkung: Für $2 \leq k \leq d$ sind die k -dimensionalen Randverteilungen einer d -dimensionalen Copula wieder Copulas, k -dimensionale Copulas.

Lemma 1 Sei $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton steigende Funktion mit $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ und $h^{\leftarrow}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die verallgemeinerte inverse Funktion von h . Es gelten dann folgende Aussagen:

1. h ist stetig $\iff h^{\leftarrow}$ ist streng monoton steigend.

2. h ist streng monoton steigend $\iff h^{\leftarrow}$ ist stetig.

3. $h^{\leftarrow}(h(x)) \leq x$

4. h ist streng monoton steigend $\implies h^{\leftarrow}(h(x)) = x$.

5. h ist stetig $\implies h(h^{\leftarrow}(y)) = y$.

Lemma 2 Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F . Es gilt: $P(F^{\leftarrow}(F(x)) = x) = 1$, d.h. $F^{\leftarrow}(F(X)) \stackrel{f.s.}{=} X$

Theorem 9 Sei G eine Verteilungsfunktion in \mathbb{R} .

1. *Quantil-Transformation:*

Wenn $U \sim U(0,1)$ (standard Gleichverteilung), dann gilt $P(G^{\leftarrow}(U) \leq x) = G(x)$.

2. *Wahrscheinlichkeit-Transformation:*

Sei Y eine Zufallsvariable mit stetiger Verteilungsfunktion G . Es gilt $G(Y) \sim U(0,1)$.

Theorem 10 (Sklar, 1959)

Sei $F: \mathbb{R}^d \rightarrow [0,1]$ eine Gesamtverteilungsfunktion mit Randverteilungsfunktionen F_1, \dots, F_d . Es existiert eine Copula C , sodass für alle $x_1, x_2, \dots, x_d \in \bar{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d)). \quad (4)$$

Wenn F_1, \dots, F_d stetig, dann ist C eindeutig.

Vice-versa, sei C eine Copula und F_1, \dots, F_d Verteilungsfunktionen. Dann ist die Funktion F aus (4) eine Gesamtverteilungsfunktion mit Randverteilungsfunktionen F_1, \dots, F_d .

C aus (4) heißt Copula von F . Für ein Zufallsvektor $X \in \mathbb{R}^d$ mit Gesamtverteilungsfunktion F heißt C auch Copula von X .

Korollar 1 Sei F eine Gesamtverteilungsfunktion mit stetigen Randverteilungsfunktionen F_1, \dots, F_d . Die eindeutige Copula von F ist folgendermaßen gegeben:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_d) = F(F_1^{\leftarrow}(u_1), F_2^{\leftarrow}(u_2), \dots, F_d^{\leftarrow}(u_d)).$$

Theorem 11 (Copula-Invarianz bzgl. streng monotonen Transformationen)

Sei $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)^T$ ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen F_1, F_2, \dots, F_d und Copula C . Seien T_1, T_2, \dots, T_d streng monoton steigende Funktionen in \mathbb{R} . Dann ist C auch eine Copula von $(T_1(X_1), T_2(X_2), \dots, T_d(X_d))^T$.

Beispiel 9 Sei $X \sim N_d(0, \Sigma)$ wobei $\Sigma = R$ die Korrelationsmatrix von X ist. Seien ϕ_R und ϕ die Verteilungsfunktionen von X bzw. X_1 . Die Copula von X ist die so genannte Gauss'sche Copula C_R^{Ga} :

$$C_R^{Ga}(u_1, u_2, \dots, u_d) = \phi_R(\phi^{-1}(u_1), \phi^{-1}(u_2), \dots, \phi^{-1}(u_d)).$$

C_R^{Ga} ist auch die Copula jeder nicht degenerierten Normalverteilung $N_d(\mu, \Sigma)$ mit Korrelationsmatrix R .

Für $d = 2$ und $\rho = R_{12} \in (-1, 1)$ gilt:

$$C_R^{Ga}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left\{\frac{-(x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right\} dx_1 dx_2$$