Klassische Extremwerttheorie

Seien (X_k), $k \in \mathbb{N}$, nicht degenerierte i.i.d. ZV mit Verteilungsfunktion F.

Für $n \geq 1$ definiere $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$, $M_n :=$ max$\{X_i \colon 1 \leq i \leq n\}$

Frage: Welche sind die möglichen (nicht degenerierten) Grenzverteilungen von normierten und zentrierten S_n bzw. M_n?

Zunächst wird die Grenzverteilung von S_n untersucht:

Für welche nicht degenerierten ZV Z gibt es zwei Zahlenfolgen $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, sodass $a_n^{-1}(S_n - b_n) \longrightarrow Z$ in Verteilung für $n \to \infty$.

Notation: $\lim_{n\to\infty} a_n^{-1}(S_n - b_n) \stackrel{\mathrm{d}}{=} Z$

Definition 11 *Eine ZV X heißt stabil, (α-stabil, Lévy-Stabil) , wenn für alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+$ und die i.i.d. Kopien X_1 und X_2 von X die Konstanten $a(c_1, c_2) \in \mathbb{R}$ und $b(c_1, c_2) \in \mathbb{R}$ existieren, sodass $c_1X_1 + c_2X_2$ und $a(c_1, c_2)X + b(c_1, c_2)$ idente Verteilungsfunktionen haben.*

Notation: $c_1X_1 + c_2X_2 \stackrel{\mathrm{d}}{=} a(c_1, c_2)X + b(c_1, c_2)$

Theorem 1 *Die Klasse von stabilen Verteilungen stimmt mit der Klasse der nicht degenerierten Grenzverteilungen passend normierter und zentrierter Summen von i.i.d. ZV überein.*

Beweis zB. in Rényi, 1962.

Theorem 2 *Die charakteristische Funktion einer stabilen Verteilung X ist folgendermaßen gegeben:*

$$\varphi_X(t) = E[\exp\{iXt\}] = \exp\{i\gamma t - c|t|^\alpha(1 + i\beta \mathrm{signum}(t) z(t,\alpha))\}$$

wobei $\gamma \in \mathbb{R}$, $c > 0$, $\alpha \in (0,2]$, $\beta \in [-1,1]$ *und*

$$z(t,\alpha) = \begin{cases} \tan(\frac{\pi\alpha}{2}) & \textit{wenn } \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi}\ln|t| & \textit{wenn } \alpha = 1 \end{cases} \tag{4}$$

Beweis: Lévy 1954, Gnedenko und Kolmogoroff 1960.

Definition 12 *Der Parameter α in (4) heißt Formparameter oder charakteristischer Exponent, die dazugehörige Verteilung heißt α-stabil und ihre Verteilungsfunktion wird mit G_α bezeichnet.*

Definition 13 *Sei X eine ZV mit Verteilungsfunktion F. Angenommen es existieren die Zahlenfolgen $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, sodass* $\lim_{n\to\infty} a_n^{-1}(S_n - b_n) = G_\alpha$, *für eine α-stabile Verteilung G_α, dann heißt es “F gehört dem Anziehungsgebiet von G_α”. Notation: $F \in DA(G_\alpha)$.*

Anmerkung: $X \sim G_2 \Longleftrightarrow \varphi_X(t) = \exp\{i\gamma t - \frac{1}{2}t^2(2c)\} \Longleftrightarrow X \sim N(\gamma, 2c)$

Exercise 4 *Zeigen Sie, dass $F \in DA(G_2) \Longleftrightarrow F \in DA(\phi)$, wobei ϕ die Standard Normalverteilung $N(0,1)$ ist.*

Hinweis: Dazu kann der “Convergence to types”-Satz angewendet werden (siehe die nächste Folie).

Definition 14 *Die ZV.* Z *und* $\tilde{Z}$ *sind vom selben Typus wenn es* $\sigma > 0$ *und* $\mu \in \mathbb{R}$ *existieren, sodass* $\tilde{Z} \stackrel{\mathrm{d}}{=} (Z-\mu)/\sigma$*, d.h.* $\tilde{F}(x) = F(\mu + \sigma x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$*, wobei* F *und* $\tilde{F}$ *die Verteilungsfunktionen von* Z *bzw.* $\tilde{Z}$ *sind.*

Theorem 3 *(Convergence to types theorem)*
Seien Z*,* $\tilde{Z}$*,* Y_n*,* $n \geq 1$*, ZV, sodass weder* Z *noch* $\tilde{Z}$ *fast sicher konstant sind. Seien* $a_n, \tilde{a}_n, b_n, \tilde{b}_n \in \mathbb{R}$*,* $n \in \mathbb{N}$*, Zahlenfolgen mit* $a_n, \tilde{a}_n > 0$*.*

(i) Wenn

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{-1}(Y_n - b_n) = Z \text{ und } \lim_{n\to\infty} \tilde{a}_n^{-1}(Y_n - \tilde{b}_n) = \tilde{Z} \tag{5}$$

dann existieren $A > 0$ *und* $B \in \mathbb{R}$*, sodass*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{a}_n}{a_n} = A \text{ und } \lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{b}_n - b_n}{a_n} = B \tag{6}$$

und

$$\tilde{Z} \stackrel{\mathrm{d}}{=} (Z - B)/A. \tag{7}$$

(ii) Angenommen (6) gilt. Dann impliziert jede der zwei Relationen in (5) die Andere, und (7) gilt auch.

Beweis: Siehe Resnick 1987,Prop. 0.2, Seite 7.

Theorem 4 (Charakterisierung des Anziehungsgebietes)

(i) Sei ϕ *die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Es gilt:*

$$F \in DA(\phi) \Longleftrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \int_{[-x,x]^C} dF(y)}{\int_{[-x,x]} y^2 dF(y)} = 0,$$

wobei $[-x,x]^C$ *das Komplement von* $[-x,x]$ *in* $\mathbb{R}$ *ist.*

(ii) Für $\alpha \in (0,2)$ *gilt:*

$$F \in DA(G_\alpha) \Longleftrightarrow F(-x) = \frac{c_1 + o(1)}{x^\alpha} L(x), \bar{F}(x) = \frac{c_2 + o(1)}{x^\alpha} L(x),$$

wobei L *eine langsam variierende Funktion ist und* $c_1, c_2 \geq 0$*,* $c_1 + c_2 > 0$*.*

Bekannt auch als Satz von Lévy, Feller und Chintschin.
Beweis in Rényi, 1962.

Anmerkung: Sei $F \in DA(G_\alpha)$ für $\alpha \in (0,2)$. Es gilt dann $E(|X|^\delta) < \infty$ für $\delta < \alpha$ und $E(|X|^\delta) = \infty$ für $\delta > \alpha$.

Beweis: Siehe Resnick 1987, oder eine anspruchsvolle Hausübung !

Grenzverteilungen von normierten und zentrierten Maxima

(X_k), $k \in \mathbb{N}$, nicht degenerierte i.i.d. ZV mit Verteilungsfunktion F.

Für $n \geq 1$, $M_n := \max\{X_i : 1 \leq i \leq n\}$

Frage: Welche sind die möglichen (nicht degenerierten) Grenzverteilungen von normierten und zentrierten M_n?

D.h. wir untersuchen

$$\lim_{n\to\infty} P(a_n^{-1}(M_n - b_n) \leq x) = \lim_{n\to\infty} P(M_n \leq u_n),$$

wobei $u_n = a_n x + b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Theorem 5 *(Poisson Approximation)*
Sei $\tau \in [0, \infty]$ und eine Zahlenfolge $u_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} n\bar{F}(u_n) = \tau \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} P(M_n \leq u_n) = exp\{-\tau\}.$$

Exercise 5 *Überzeugen Sie sich mit Hilfe des "convergence to type" Satzes, dass H und $\tilde{H}$ vom selben Typus sind, wenn* $\lim_{n\to\infty} a_n^{-1}(M_n - b_n) = H$ *und* $\lim_{n\to\infty} \tilde{a}_n^{-1}(M_n - \tilde{b}_n) = \tilde{H}$.

Definition 15 *Eine nicht degenerierte ZV X heißt max-stabil wenn für jedes $n \geq 2$ $\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \stackrel{\mathrm{d}}{=} a_n X + b_n$ für unabhängige Kopien X_1,X_2, ...,X_n von X und geeignete Konstanten $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$.*

Theorem 6 *Die Klasse von max-stabilen Verteilungen stimmt mit der Klasse der nicht degenerierten Grenzverteilungen normierter Maxima von i.i.d. Zufallsvariablen überein.*

Beweis in McNeil, Frey und Embrechts, 2005.

Theorem 7 *(Fischer-Tippet Theorem)*
Sei (X_k) eine Folge von i.i.d. ZV. Wenn die Konstanten $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $a_n > 0$, und eine nicht degenerierte Verteilung H existieren, sodass $\lim_{n\to\infty} a_n^{-1}(M_n - b_n) = H$, dann ist H vom selben Typus wie eine der untenstehenden drei Verteilungen:

$$
\begin{array}{llll}
\textit{Fréchet} & \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \exp\{-x^{-\alpha}\} & x > 0 \end{cases} & & \alpha > 0 \\
\textit{Weibull} & \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^{\alpha}\} & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} & & \alpha > 0 \\
\textit{Gumbel} & \Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\} & & x \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

Beweis: Resnick 1987, Seite 9-11.