Case II: F is unknown $\Rightarrow$ Bootstrapping!

The empirical distribution function of X_i, $1 \le i \le n$, is giben as

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{[x_i,\infty)}(x).$$

For n large $F_n \approx F$ holds.

Generate samples from F_n be choosing n elementes in $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ and putting every element back to the set immediately after its choice

Assume N such samples are generated: $x_1^{*(i)}, x_2^{*(i)}, \ldots, x_n^{*(i)}$, $1 \le i \le N$.

Compute $\theta_i^* = \widehat{\theta}\Big(x_1^{*(i)}, x_2^{*(i)}, \ldots, x_n^{*(i)}\Big)$.

The empirical distribution of θ_i^* is given as $F_N^{\theta^*}(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I_{[\theta_i^*,\infty)}(x)$;

it approximates the distribution function $F^{\widehat{\theta}}$ of $\widehat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ for $N \to \infty$.

A confidence interval (a, b) with confidence level p is given by

$$a = q_{(1-p)/2}(F_N^{\theta^*}),\ b = q_{(1+p)/2}(F_N^{\theta^*}).$$

Thus $a = \theta^*_{[N(1+p)/2]+1,N}$, $b = \theta^*_{[N(1-p)/2]+1,N}$,

where $\theta^*_{1,N} \ge \theta^*_{2,N} \ge \ldots \theta^*_{N,N}$ is obtained by sorting $\theta_1^*, \theta_2^*, \ldots, \theta_N^*$.

Summary of the non-parametric bootstrapping approach to compute confidence intervals

Input: Sample $x_1, x_2, \ldots, x_n$ of the i.i.d. random variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ with distribution function F and an estimator $\widehat{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ of an unknown parameter $\theta(F)$, A confidence level $p \in (0,1)$.

Output: A confidence interval I_p for θ with confidence level p.

- Generate N new Samples $x_1^{*(i)}, x_2^{*(i)}, \ldots, x_n^{*(i)}$, $1 \leq i \leq N$, by chosing elements in $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ and putting them back right after the choice.
- Compute $\theta_i^* = \widehat{\theta}\left(x_1^{*(i)}, x_2^{*(i)}, \ldots, x_n^{*(i)}\right)$.
- Setz $I_p := \left(\theta^*_{[N(1+p)/2]+1,N}, \theta^*_{[N(1-p)/2]+1,N}\right)$, where $\theta^*_{1,N} \geq \theta^*_{2,N} \geq \ldots \theta^*_{N,N}$ is obtained by sorting $\theta_1^*, \theta_2^*, \ldots, \theta_N^*$.

An approximative solution without bootstrapping

Input: A sample $x_1, x_2, \ldots, x_n$ of the random variables X_i, $1 \leq i \leq n$, i.i.d. with unknown continuous distribution function F, a confidence level $p \in (0,1)$

Output: A small $p' \in (0,1)$, $p' \geq p$, and a confidence interval (a,b) for $q_\alpha(F)$, i.e. $a = a(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $b = b(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, such that

$P(a < q_\alpha(F) < b) = p'$ and $P(a \geq q_\alpha(F)) = P(b \leq q_\alpha(F)) = (1-p)/2$ holds.

Determine $i > j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, and the smallest $p' > p$, such that

$$P\Big(x_{i,n} < q_\alpha(F) < x_{j,n}\Big) = p' \qquad (*) \qquad \text{and}$$

$$P\Big(x_{i,n} \geq q_\alpha(F)\Big) \leq (1-p)/2 \text{ and } P\Big(x_{j,n} \leq q_\alpha(F)\Big) \leq (1-p)/2 (**),$$

where $x_{1,n} \geq x_{2,n} \geq \ldots \geq x_{n,n}$ is obtained from $x_1, x_2, \ldots, x_n$ by sorting.

Let $Y_\alpha := \#\{x_k \colon x_k > q_\alpha(F)\}$

We get $P(x_{j,n} \leq q_\alpha(F)) \approx P(x_{j,n} < q_\alpha(F)) = P(Y_\alpha \leq j-1)$
$P(x_{i,n} \geq q_\alpha(F)) \approx P(x_{i,n} > q_\alpha(F)) = 1 - P(Y_\alpha \leq i-1)$

$Y_\alpha \sim Bin(n, 1-\alpha)$ since $Prob(x_k \geq q_\alpha(F)) \approx 1 - \alpha$ for a sample point x_k.

Compute $P(x_{j,n} \leq q_\alpha(F))$ and $P(x_{i,n} \geq q_\alpha(F))$ for different i and j as long as $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i > j$, which fulfill $(*)$ and $(**)$ are found.

Historische Simulation

Seien $x_{m-n+1}, \ldots, x_m$ historische Beobachtungen der Veränderungen der Risikofaktoren $X_{m-n+1}, \ldots, X_m$.

Annahme: Die historischen Verluste sind i.i.d.

Die historischen Verlustwerte $l_k = l_{[m]}(x_{m-k+1})$, $k = 1, 2, \ldots, n$, stellen eine Stichprobe der Verlustverteilung dar.

Empirischer VaR: $\widehat{VaR} = q_\alpha(\hat{F}_n^L) = l_{[n(1-\alpha)]+1,n}$

Empirischer CVaR: $\widehat{CVaR} = \frac{\sum_{i=1}^{[n(1-\alpha)]+1} l_{i,n}}{[n(1-\alpha)]+1}$,

wobei $l_{1,n} \geq l_{2,n} \geq \ldots \geq l_{n,n}$ durch die Sortierung von l_i, $1 \leq i \leq n$, entsteht.

VaR und CVaR des aggregierten Verlustes über mehrere Tage, zB. 10 Tage, kann mit Hilfe der Verlustwerte

$$l_k^{(10)} = l_{[m]}\Big(\sum_{j=1}^{10} x_{m-n+10(k-1)+j}\Big) \qquad k = 1, \ldots, [n/10]$$

geschätzt werden.

Historische Simulation - Folgerung

Vorteile:

- einfache Implementierung
- berücksichtigt die Abhängigkeitsstruktur zwischen den Komponenten des Vektors der Veränderungen der Risikofaktoren $X_{m-k} = (X_{m-k,1}, \ldots, X_{m-k,d})$.

Nachteile:

- sehr viele historische Daten notwendig um zuverlässige Schätzer zu bekommen
- Schätzung impliziert, dass der geschätze Verlust nicht größer als bereits historisch realisierte Verluste sein kann.

Varianz-Kovarianz Methode

Grundidee: Verwendung der linearisierten Verlustfunktion.

$L_{m+1}^{\Delta} = l_m^{\Delta}(X_{m+1}) = -V\sum_{i=1}^{d} w_i X_{m+1,i} = -Vw^T X_{m+1}$

wobei $V := V_m$, $w_i := w_{m,i}$, $w = (w_1, \ldots, w_d)^T$,
$X_{m+1} = (X_{m+1,1}, X_{m+1,2}, \ldots, X_{m+1,d})^T$.

Annahme: $X_{m+1} \sim N_d(\mu, \Sigma)$

Daraus folgt: $-Vw^T X_{m+1} \sim N(-Vw^T\mu, V^2 w^T \Sigma w)$

Seien $x_{m-n+1}, \ldots, x_m$ historische Beobachtung der Veränderungen der Risikofaktoren.

Annahme: $x_{m-n+1}, \ldots, x_m$ sind i.i.d.

Schätzer für μ_i: $\widehat{\mu}_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{m-k+1,i}$, $i = 1, 2, \ldots, d$

Schätzer $\widehat{\Sigma} = \big(\widehat{\sigma}_{ij}\big)$ für $\Sigma = \big(\sigma_{ij}\big)$:

$$\widehat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_{m-k+1,i} - \mu_i)(x_{m-k+1,j} - \mu_j) \qquad i, j = 1, 2, \ldots, d$$

Schätzer für VaR: $\widehat{VaR}(L_{m+1}) = -Vw^T\widehat{\mu} + V\sqrt{w^T\widehat{\Sigma}w}\,\phi^{-1}(\alpha)$ (siehe Bsp. (8)) .

Varianz-Kovarianz Methode - Folgerung

Vorteile:

- analytische Lösung
- einfache Implementierung
- keine Simulationen notwendig

Nachteile:

- Linearisieung nicht immer adäquat, nur für einen kurzen Zeithorizont gerechtfertigt (siehe Übung (2)).
- Annahme der Normalverteilung könnte zur Unterschätzung des Risikos führen und sollte begründet werden (zB. anhand von historischen Daten).

Monte-Carlo Verfahren

(1) Historische Beobachtungen der Veränderungen der Risikofaktoren X_{m-n+1}, ..., X_m.

(2) Annahme über ein parametrisches Modell für die Verteilungsfunktion der X_k, $m - n + 1 \le k \le m$;
zB. gemeinsame Verteilungsfunktion F und Unabhängigkeit.

(3) Schätzung der Parameter von F.

(4) Erzeugung von N Stichproben $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N$ aus F ($N \gg 1$).
Berechnung der Verlustwerte $l_k = l_{[m]}(\tilde{x}_k)$, $1 \le k \le N$

(5) Ermittlung der empirischen Verteilungsfunktion der Verlustfunktion L_{m+1}:

$$\widehat{F}_N^{L_{m+1}}(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} I_{[l_k,\infty)}(x).$$

(5) Ermittlung der Schätzer für VaR und CVAR der Verlustfunktion:

$$\widehat{VaR}(L_{m+1}) = q_\alpha\big(\widehat{F}_N^{L_{m+1}}\big) = l_{[N(1-\alpha)]+1,N}$$

$$\widehat{CVaR}(L_{m+1}) = \frac{\sum_{k=1}^{[N(1-\alpha)]+1} l_{k,N}}{[N(1-\alpha)]+1}$$

wobei die Verlustwerte sortiert werden:

$$l_{1,N} \geq l_{2,N} \geq \ldots \geq l_{N.N}\,.$$

Monte-Carlo Verfahren - Folgerung

Vorteile:

- Sehr flexibel; für F kann jedes Modell verwendet werden, aus dem simuliert werden kann
- Berücksichtigung von zeitlichen Abhängigkeiten zwischen den Veränderungen der Risikofaktoren möglich etwa durch Verwendung von Zeitreihen

Nachteile:

- Rechenintensiv; große Anzahl von Simulationen notwendig um gute Schätzwerte zu bekommen.

Monte-Carlo Verfahren - Folgerung

Example 11 *PF besteht aus einem Stück der Aktie S mit Preis=*S_t *zum Zeitpunkt* t*. Die Veränderungen der Risikofaktoren*

$$X_{k+1} = \ln(S_{t_{k+1}}) - \ln(S_{t_k}),$$

sind i.i.d. mit Verteilungsfunktion F_θ*, wobei* θ *ein unbekannter Parameter ist.*

θ *kann mit Hilfe von historischen Daten geschätzt werden (zB. ML Verfahren)*

Sei der heutige Preis $S_{t_k} = S$

Wir zeigen: VaR des PF über $[t_k, t_{k+1}]$ *ist folgendermaßen gegeben*

$$VaR_\alpha(L_{t_k+1}) = S\Big(1 - \exp\{F_\theta^{\leftarrow}(1-\alpha)\}\Big)\,.$$

Wenn F_θ *kompliziert, dann kann die analytische Berechnung von CVaR schwierig sein. Alternative: Monte-Carlo Simulation.*

Monte-Carlo Verfahren - Folgerung

Example 12 *Sei das PF und die Veränderungen der Risikofaktoren* X_{k+1} *wie im obigen Beispiel.*

Ein populäres Modell für die log. Rendite einer Aktie: GARCH(1,1) (siehe zB. Alexander 2002):

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= \sigma_{k+1} Z_{k+1} &(1)\\ \sigma_{k+1}^2 &= a_0 + a_1 X_k^2 + b_1 \sigma_k^2 &(2) \end{aligned}$$

wobei Z_k, $k \in \mathbb{N}$, *sind i.i.d. und standard normalverteilt* a_0,a_1 *und* b_1 *sind Parameter, die geschätzt werden.*

Es ist einfach aus diesem Modell zu simulieren.

Analytische Berechnung der VaR bzw. CVaR für ein Zeitintervall bestehend aus mehreren Perioden sind hingegen schwierig! Ausprobieren!

3. Kapitel: Extremwerttheorie

Notation:

- Wir verwenden oft dieselbe Notation für die Verteilung einer ZV und ihre Verteilungsfunktion!

- $f(x) \sim g(x)$ für $x \to \infty$ bedeutet $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 1$

- $\bar{F} := 1 - F$ (*rechter Rand "right Tail"* einer univariaten Verteilungsfunktion F).

Bezeichnungskonvention: Man sagt eine ZV X hat "fat Tails" oder ist "heavy tailed" (h.t.) wenn $\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(x)}{e^{-\lambda x}} = \infty$, $\forall \lambda > 0$.

Auch eine ZV X für die $\exists k \in \mathbb{N}$, sodass $E(X^k) = \infty$, wird oft *heavy tailed* genannt.

Reguläre Variation

Definition 9 *Eine messbare Funktion* $h\colon (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ *besitzt eine reguläre Variation mit Index* $\rho \in \mathbb{R}$ *um* $+\infty$ *wenn*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{h(tx)}{h(t)} = x^{\rho}\,,\ \forall x > 0 \tag{3}$$

Bezeichnung: $h \in RV_{\rho}$.

Wenn $\rho = 0$, *dann heißt es* h *variiert langsam um* ∞.

Wenn $h \in RV_{\rho}$ *dann* $h(x)/x^{\rho} \in RV_0$.

Falls $h \in RV_{\rho}$, *dann* $\exists L \in RV_0$ *sodass* $h(x) = L(x)x^{\rho}$ $(L(x) = h(x)/x^{\rho})$.

Falls $\rho < 0$, *dann ist die Konvergenz in (3) gleichmäßig in jedem Interval* $(b,+\infty)$ *für* $b > 0$.

Example 13 *Zeigen Sie, dass für die untenstehenden Funktionen* L, $L \in RV_0$ *gilt.*

(a) $\lim_{x\to+\infty} L(x) = c \in (0,+\infty)$

(b) $L(x) = \ln(1+x)$

(c) $L(x) = \ln(1+\ln(1+x))$

Example 14 *Gilt es $f \in RV_0$ für $f(x) = 3 + \sin x$, $f(x) = \ln(e + x) + \sin x$?*

Eine Funktion $L \in RV_0$ kann unendlich stark variieren um $+\infty$:

$$\liminf_{x\to\infty} L(x) = 0 \text{ and } \limsup_{x\to\infty} L(x) = \infty$$

Ein Beispiel dafür ist $L(x) = \exp\{(\ln(1 + x))^2 \cos((\ln(1 + x))^{1/2})\}$.

Definition 10 *Sei $X > 0$ eine ZV mit Verteilungsfunktion F. Man sagt X besitzt eine reguläre Variation um $+\infty$, wenn $\bar{F} \in RV_{-\alpha}$ für ein $\alpha > 0$.*

Example 15 *Pareto Verteilung: Sei $F(x) = 1 - x^{-\alpha}$, für $x > 1$ und $\alpha > 0$. Dann gilt $\bar{F}(tx)/\bar{F}(x) = x^{-\alpha}$ für $t > 0$. D.h. $\bar{F} \in RV_{-\alpha}$.*

Example 16 *Fréchet-Verteilung: Sei $F(x) = \exp\{-x^{-\alpha}\}$ für $x > 0$ und $F(0) = 0$, $\alpha > 0$. Es gilt $\lim_{x\to\infty} \bar{F}(x)/x^{-\alpha} = 1$. Daraus folgt $\bar{F} \in RV_{-\alpha}$.*

Proposition 1 *(ohne Beweis)*
Sei $X > 0$ eine ZV mit Verteilungsfnk. F, sodass $\bar{F} \in RV_{-\alpha}$ für ein $\alpha > 0$. Es gilt dann $E(X^\beta) < \infty$ für $\beta < \alpha$ und $E(X^\beta) = \infty$ für $\beta > \alpha$.

Die Umkehrung gilt nicht!

Example 17 *Seien X_1 und X_2 zwei nichtnegative i.i.d. ZV mit Verteilungsfunktion F, $\bar{F} \in RV_{-\alpha}$ für ein $\alpha > 0$.*

Annahmen:

- *X_1 (X_2) gibt den Verlust eines Portfolios bestehend aus 1 Stück der Aktie A_1 (A_2) an.*

- *Die Preise von A_1 und A_2 identisch und deren logarithmierten Rendite i.i.d. sind.*

Ein Investor hat 2 Stück der Aktie A_1 gekauft. Kann der Investor die Verlustwahrscheinlichkeit verringern in dem er auf ein diversifiziertes Portfolio bestehend aus einem Stück der Aktie A_1 und einem Stück der Aktie A_2 wechselt?

Example 18 *Seien $X, Y \geq 0$ zwei ZV, die die Verluste zweier Geschäftslinien einer Versicherungsgesellschaft darstellen (zB. Brand- bzw. Autoversicherung).*

Annahmen:

- *$\bar{F} \in RV_{-\alpha}$, für ein $\alpha > 0$, wobei F Verteilungsfunktion von X ist.*

- *$E(Y^k) < \infty$, $\forall k > 0$.*

Die Versicherungsgesellschaft möchte $\lim_{x\to\infty} P(X > x | X + Y > x)$ ermitteln.