Exponential tilting: Bestimmung des IS-Dichte für "light tailed" Variablen

Sei $M_x(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die momenterzeugende Funktion der Zufallsvariable X mit Verteilungsdichte f:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx$$

IS-Dichte: $g_t(x) = \frac{e^{tx} f(x)}{M_X(t)}$

Likelihood Ratio: $r_t(x) = \frac{f(x)}{g_t(x)} = M_X(t) e^{-tx}$.

Sei $\mu_t = E_{g_t}(X) = E(X \exp\{tX\})/M_X(t)$.

Wie kann man ein geeignetes t für ein bestimmtes IS Problem ermitteln?

Z.B. für die Schätzung der Tail-Wahrscheinlichkeit?
Das Ziel ist t so zu wählen, dass $E(r(X); X \geq c) = E(I_{X \geq c} M_X(t) e^{-tX})$ klein wird.

$e^{-tx} \leq e^{-tc}$, für $x \geq c$, $t \geq 0 \Rightarrow E(I_{X \geq c} M_X(t) e^{-tX}) \leq M_X(t) e^{-tc}$.

Wir setzten $t = argmin\{M_X(t) e^{-tc}\colon t \geq 0\}$.

Daraus folgt $t = t(c)$ wobei $t(c)$ die Lösung der Gleichung $\mu_t = c$ ist.

(Eine eindeutige Lösung der letzten Gleichung existiert für alle relevanten Werte von c - ohne Beweis).

IS im Falle von Wahrscheinlichkeitsmaßen
(nützlich für die Abschätzung des Risikos von Kreditportfolii)

Seien f und g Wahrscheinlichkeitsdichten. Sei $A \subset \mathbb{R}$. Definiere zwei Wahrscheinlichkeitsmasse P und Q:

$$P(A) := \int_{x \in A} f(x)dx \text{ und } Q(A) := \int_{x \in A} g(x)dx$$

Ziel: Ermittlung von $\theta := E^P(h(X))$ dem Erwartungswert einer gegebenen Funktion $h: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ im Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P(A))$.

Dann gilt:

$$\theta := E^P(h(X)) = E^Q(h(X)r(X)) \text{ mit } r(x) := dP/dQ\,,$$

also ist r die maßtheoretische Dichte von P bzgl Q.

Exponential tilting im Fall von Wahrscheinlichkeitsdichten:

Sei X eine ZV in $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sodass $M_X(t) = E^P(\text{exp}\{tX\}) < \infty$, $\forall t$.
Definiere ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q_t in $(\Omega, \mathcal{F})$, sodass

$$dQ_t/dP = \text{exp}(tX)/M_X(t), \text{ d.h. } Q_t(A) := E^P\left(\frac{\text{exp}\{tX\}}{M_X(t)}; A\right).$$

Dann gilt $\frac{dP}{dQ_t} = M_X(t)\,\mathrm{exp}(-tX) =: r_t(X)$.

Der IS-Algorithmus bleibt gleich:
Simuliere unabhängige Realisierungen von X_i in $(\Omega, \mathcal{F}, Q_t)$ und setze $\widehat{\theta}_n^{(IS)} = (1/n) \sum_{i=1}^{n} X_i r_t(X_i)$.

Anwendung von IS auf Bernoulli Mischung Modelle

(siehe Glasserman und Li (2003))

Sei $L = \sum_{i=1}^{m} e_i Y_i$ die Verlustfunktion eines Kreditportfolios.

Y_i sind die Verlustindikatoren mit Default-Wahrscheinlichkeit $\bar{p}_i$ und $e_i = (1 - \lambda_i) L_i$ die positiven deterministischen Verlusthöhen wenn ein Verlust realisiert wird (λ_i sind recovery rates und L_i sind die Kredithöhen), $i = 1, 2, \ldots, m$.

Sei Z ein Vektor von ökonomischen Einflussfaktoren,
sodass $Y_i | Z$ unabhängig und $Y_i | (Z = z) \sim Bernoulli(p_i(z))$ sind.

Ziel: Schätzung von $\theta = P(L \geq c)$ mit Hilfe des IS-Ansatzes, für ein gegebenes c, $c >> E(L)$.

Vereinfachter Fall: Y_i sind unabhängig, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Sei $\Omega = \{0, 1\}^m$ der Raum der Zustände vom Zufallsvektor Y.

Das Wahrscheinlichleitsmaß P in Ω:

$$P(\{y\}) = \prod_{i=1}^{m} \bar{p}_i^{y_i} (1 - \bar{p}_i)^{1 - y_i}, \; y \in \{0, 1\}^m.$$

Die momenterzeugende Funktion von L: $M_L(t) = \prod_{i=1}^{m} (e^{te_i} \bar{p}_i + 1 - \bar{p}_i)$.

Das Wahrscheinlichkeitsmaß Q_t:

$$Q_t(\{y\}) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\exp\{te_i y_i\}}{\exp\{te_i\}\bar{p}_i + 1 - \bar{p}_i} \bar{p}_i^{y_i} (1 - \bar{p}_i)^{1-y_i} \right).$$

Seien $\bar{q}_{t,i}$ neue Default-Wahrscheinlichkeiten:

$$\bar{q}_{t,i} := \exp\{te_i\}\bar{p}_i / (\exp\{te_i\}\bar{p}_i + 1 - \bar{p}_i).$$

Somit gilt:

$$Q_t(\{y\}) = \prod_{i=1}^{m} \bar{q}_i^{y_i} (1 - \bar{q}_i)^{1-y_i}, \ y \in \{0,1\}^m.$$

D.h. nach der exponential tilting sind die Default-Indikatoren unabhängig mit neuen Default-Wahrscheinlichkeiten $\bar{q}_{t,i}$.

$\lim_{t\to\infty} \bar{q}_{t,i} = 1$ und $\lim_{t\to-\infty} \bar{q}_{t,i} = 0 \Rightarrow$
$E^{Q_t}(L)$ nimmt alle Werte in $(0, \sum_{i=1}^{m} e_i)$ an für $t \in \mathbb{R}$.

Für IS-Anwendungen wähle t, sodass $\sum_{i=1}^{m} e_i \bar{q}_{t,i} = c$.

Allgemeiner Fall: Y_i sind unabhängig bedingt durch Z

1. Schritt: Schätzung der bedingten Überschuss-Wahrscheinlichkeit $\theta(z) := P(L \geq c | Z = z)$ für eine gegebene Realisierung z der ökonomischen Faktoren Z, mit Hilfe des im vereinfachten Fall beschriebenen IS-Ansatzes.

Algorithmus 3 *(IS für die bedingte Verlustverteilung)*

(1) *Für ein gegebenes z berechne die bedingtenn Default-Wahrscheinlichkeiten $p_i(z)$ (wie im einfachen Unabhägigkeitsfall) und löse folgende Gleichung:*

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\exp\{te_i\}p_i(z)}{\exp\{te_i\}p_i(z) + 1 - p_i(z)} = c$$

Die Lösung $t = t(c, z)$ gibt den richtigen tilting-Grad.

(2) *Erzeuge n_1 bedingte Realisierungen des Vektors der Default-Indikatoren $(Y_1, \ldots, Y_m)$. Die einzelnen Indikatoren Y_i, werden unabhängig aus $Bernoulli(q_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, simuliert, wobei*

$$q_i = \frac{\exp\{t(c, z)e_i\}p_i(z)}{\exp\{t(c, z)e_i\}p_i(z) + 1 - p_i(z)}$$

(3) *Sei $M_L(t, z) := \prod[\exp\{te_i\}p_i(z) + 1 - p_i(z)]$ die bedingte Moment-erzeugende Funktion von L. Seien $L^{(1)}$, $L^{(2)}$,...,$L^{(n_1)}$ die n_1 bedingten Realisierungen von L für die n_1 simulierten Realisierun-*

gen von $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$*. Berechne den* IS*-Schätzer für die Tail-Wahrscheinlichkeit der bedingten Verlustverteilung:*

$$\widehat{\theta}_{n_1}^{(IS)}(z) = M_L(t(c,z),z)\frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_1} I_{L^{(j)}\geq c}\,\mathsf{exp}\{-t(c,z)L^{(j)}\}L^{(j)}.$$

2. Schritt: Schätzung der unbedingten Überschuss Wahrscheinlichkeit $\theta = P(L \geq c)$.

Naive Vorgangsweise: Erzeuge mehrere Realisierungen z der Einflussfaktoren Z und berechne $\widehat{\theta}_{n_1}^{(IS)}(z)$ für jede dieser Realisierungen. Der gesuchte Schätzer ist der Durchschnittswert der Schätzer $\widehat{\theta}_{n_1}^{(IS)}(z)$ über alle Realisierungen z.
Das ist nicht die beste Lösung, siehe Glasserman und Li (2003).

Bessere Herangehensweise: IS für die Einflussfaktoren.

Annahme: $Z \sim N_p(0, \Sigma)$ (zB. probit-normal Bernoulli Mischung)

Die IS-Dichte g ist die Dichte von $N_p(\mu, \Sigma)$ für einen "neuen" Erwartungswertvektor $\mu \in \mathbb{R}^p$. Eine gute Wahl von μ sollte zu häufigen Realisierungen z die zu höheren bedingten Default-Wahrscheinlichkeiten $p_i(z)$ führen.

Likelihood Ratio:

$$r_\mu(Z) = \frac{\exp\{-\frac{1}{2}Z^t\Sigma^{-1}Z\}}{\exp\{-\frac{1}{2}(Z-\mu)^t\Sigma^{-1}(Z-\mu)\}} = \exp\{-\mu^t\Sigma^{-1}Z + \frac{1}{2}\mu^t\Sigma^1\mu\}$$

Algorithmus 4 *(vollständige IS für Bernoulli Mischung Modelle mit Gauss'schen Faktoren)*

(1) Erzeuge $z_1, z_2, \ldots, z_n \sim N_p(\mu, \Sigma)$ (n ist die Anzahl der Simulationsrunden)

(2) Für jedes z_i berechne $\widehat{\theta}_{n_1}^{(IS)}(z_i)$ wie in Algorithmus 3.

(3) Berechne den IS-Schätzer für die unbedingte Überschuss-Wahrscheinlichkeit:

$$\widehat{\theta}_n^{(IS)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} r_\mu(z_i) \widehat{\theta}_{n_1}^{(IS)}(z_i)$$

Die Auswahl von μ

μ soll so gewählt werden, dass die Varianz des Schätzers klein ist.

Idee von Glasserman und Li (2003) (Skizze):

$\hat{\theta}_{n_1}^{(IS)}(z) \approx P(L \geq c|Z = z) \Rightarrow$
Suche eine gute IS-Dichte für die Funktion $z \mapsto P(L \geq c|Z = z)$.

Ansatz:

a) die optimale IS-Dichte g^* ist proportional zu

$$P(L \geq c|Z = z) \exp\{-\frac{1}{2} z^t \Sigma^{-1} z\}.$$

b) verwende als IS-Dichte eine multivariate Normalverteilung mit demselben Modus wie die optimale IS Dichte g^*.

Da der Modus einer multivariaten Normalverteilung $N_p(\mu, \Sigma)$ gleich ihrem Erwartungswert μ ist, führt die Bestimmung von μ zu folgendem Optimierungsproblem:

$$\mu = \text{argmax}_z \left\{ P(L \geq c|Z = z) \exp\{-\frac{1}{2} z^t \Sigma^{-1} z\} \right\}.$$

Exakte Lösung ist schwierig weil $P(L \geq c|Z = z)$ i.a. nicht in analytischer Form verfügbar ist.

Siehe Glasserman und Li (2003) für Lösungsansätze.

Risikomodelle in der Versicherungsmathematik

Definition 1 *Sei $N(t)$ eine diskrete ZV, die die Anzahl der Verluste über einen gegebenen Zeitraum $[0,t]$ angibt. Seien X_1, X_2, ..., die einzelnen Verluste.*
Der Gesamtverlust (oder der aggregierte Verlust) ist $S_{N(t)} = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k$.
Die Gesamtverteilungsfunktion $F_{S_{N(t)}}(x) = P(S_{N(t)} \leq x)$.
Für ein fixes t (zB. $t = 1$) wird der Zeit-Index vernachlässigt:
$S_N := S_{N(t)}$, $F_{S_N} := F_{S_{N(t)}}$.

Definition 2 *Seien X_k, $k = 1, 2, \ldots$, i.i.d. mit gemeinsamer Verteilungsfunktion G, $G(0) = 0$. Weiters seien X_k, $k = 1, 2, \ldots$, und N unabhängig. Die ZV S_N heißt in diesem Fall zusammengesetzte Summe. Die ZV N heißt zusammensetzende Variable.*
Notation: $P(N = k) = p_N(k)$.

Verteilungsfunktion der zusammengesetzten Summe:

$$F_{S_N}(x) = P(S_N \leq x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_N(k) G^{(k)}(x)$$

wobei
$G^{(k)}(x) = P(S_k = X_1 + X_2 + \ldots + X_k \leq x)$ die k-te Faltung von G ist.
Hier gilt $G^{(0)}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$.

Für die Laplace-Stieltjes Transformation $\widehat{F_{S_N}}$ der zusammengesetzten Summe S_N gilt:

$$\widehat{F_{S_N}}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_N(k)\widehat{G^{(k)}}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_N(k)\widehat{G}^k(s) = \mathsf{pgf}_N(\widehat{G}(s))$$

wobei pgf_N die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von N ist.

Beispiel 4 *(Die zusammengesetzte Poisson Verteilung)*
Sei $N \sim Poi(\lambda)$, $\lambda > 0$. D.h. $p_N(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2 \ldots, n, \ldots,$.

Für $s \in \mathbb{R}$ gilt $\mathsf{pgf}_N(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}s^k = \exp\{-\lambda(1-s)\}$.

Für $s \geq 0$ gilt $\widehat{F_{S_N}}(s) = \exp\{-\lambda(1-\widehat{G}(s))\}$.

Notation $S_N \sim CPoi(\lambda, G)$.

Wenn $\widehat{G}$ und pgf_N differenzierbar sind, dann gilt:

$$\frac{d^k}{ds^k}\mathsf{pgf}_N(s)\,|_{s=1} = E(N(N-1)\ldots(N-k+1)) \text{ und}$$

$$(-1)^k \frac{d^k}{ds^k}\widehat{G}(s)\,|_{s=0} = E(X_1^k) =: \mu_k$$

Folgerung Beispiel 4: Für $S_N \sim CPoi(\lambda, G)$ gilt:

$$E(S_n) = (-1)\frac{d\widehat{F}_{S_N}(s)}{ds}|_{s=0} = \exp\{-\lambda[1-\widehat{G}(0)]\}\lambda(-\widehat{G}'(0)) = E(N)E(X_1)$$

Analog: $var(S_N) = \lambda E(X_1^2)$.

Theorem 1 *(Die Momente einer zusammengesetzten Verteilung)*

Für die zusammengesetzte Summe aus Definition 2 mit $E(N) \leq \infty$ und $E(X_1^2) \leq \infty$ gilt:

$E(S_N) = E(N)E(X_1)$ *und* $var(S_N) = var(N)(E(X_1))^2 + E(N)var(X_1)$

Die Poisson Verteilung als Modell der Verlustehäufigkeit

N – Anzahl der im Intervall $[0, 1]$ eingetreten Verluste.

Annahme 1: In jedem Intervall $[(k-1)/n, k/n]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, gibt es einen Verlust mit Wahrscheinlichkeit p_n.

Annahme 2: Der Eintritt eines Verlustes in einem Intervall ist unabhängig vom Eintritt der Verluste in anderen Intervallen.

Annahme 3: $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$.

N_n – Gesamtanzahl der Verluste im Intervall $[0, 1]$:
$P(N_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Es gilt dann $\lim_{n\to\infty} P(N_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, für $k = 0, 1, \ldots,$.

Das heißt $N \approx N_\infty \sim Poi(\lambda)$.

Theorem 2 *(Summe von Zusammengesetzten Poisson ZV)*
Sei $S_{N_i} \sim CPoi(\lambda_i, G_i)$, $i = 1, 2, \ldots, d.$ *und* S_{N_i} *sind unabhängig. Dann gilt* $S_N = \sum_{i=1}^d S_{N_i} \sim CPoi(\lambda, G)$ *wobei* $\lambda = \sum_{i=1}^d \lambda_i$ *und* $G = \sum_{i=1}^d (\lambda_i/\lambda) G_i$.

Simulation solcher Verluste: Simuliere eine Zahl i aus $\{1, 2, \ldots, d\}$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^d \lambda_i}$ und dann simuliere aus der Verteilung G_i.

Approximation und Panjer Rekursion

Für gegebene λ und G kann S_N leicht simuliert werden. Wiederholte Simulation führt zu einer empirischen Verteilung, die als Basis für die Approximation der echten Verteilung mit Hilfe einer analytisch gegebenen Verteilung verwendet wird.

Normale Approximation

Sei $S_N \sim Cpoi(\lambda, G)$ sodass $E(N) < \infty$, $G(0) = 0$ und $\int_0^\infty x^2 dG(x) < \infty$.

Durch die Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes und unter Anwendung von Satz 1 kann F_{S_N} mit Hilfe der Normalverteilung approximiert werden (siehe Embrechts et al. (1997), Satz 2.5.16):

$$F_{S_N}(x) \approx \Phi\left(\frac{x - E(N)E(X_1}{\sqrt{var(N)(E(X_1))^2 + E(N)var(X_1)}}\right)$$

wobei Φ die standard Normalverteilungsfunktion ist.

Für $S_N \sim Poi(\lambda, G)$ ist die Schiefe folgendermaßen gegeben:

$$v(S_N) = \frac{E[S_N - E(S_N)]^3}{var(S_N)^{3/2}} = \frac{E(X_1^3)}{\sqrt{\lambda E(X_1^2)^3}} > 0$$

Suche eine Approximation mit Hilfe einer rechtsschiefen Verteilung!

Approximation durch eine verschobene Gamma Verteilung

$S_N \approx k + Y$ wobei k ein Translation-Parameter ist und $Y \sim \gamma(\alpha, \beta)$.

k, α und β werden bestimmt in dem der Erwartungswert, die Varianz und die Schiefe von S_N mit den dazugehörigen Statistiken von $k + Y$ gleichgesetzt werden.

Im Falle von $N \sim Poi(\lambda)$ gilt:

$$k + \frac{\alpha}{\beta} = \lambda E(X_1), \; \frac{\alpha}{\beta^2} = \lambda E(X_1^2), \; \frac{2}{\sqrt{\alpha}} = \frac{E(X_1^3)}{\sqrt{\lambda (E(X_1^2))^3}}$$

Monte Carlo Simulation

Wenn die Daten einer CPoi Verteilung auf einer sehr heavy-tailed Verteilung hindeuten, dann könnte eine Approximation mit der GPD Verteilung im Bereich der höheren Quantilen bessere Ergebnisse liefern.

Siehe Frachot (2004) und Moscadelli (2004)

Die Rekursionen von Panjer

Annahme: X_1 hat eine diskrete Verteilung mit Werten $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ und $g_k = P(X_1 = k)$. Sei (einfachheitshalber) $g_0 = 0$.

Weiters sei $p_k = p_N(k) = P(N = k)$, $s_k = P(S_N = k)$ und $g_k^{(n)} = P(X_1 + X_2 + \ldots + X_n = k)$.

Es gilt $g_k^{(n+1)} = \sum_{i=1}^{k-1} g_i^{(n)} g_{k-i}$ für $k \geq 2$ und $n \geq 1$.

Daraus folgt:

$$s_0 = P(S_N = 0) = P(N = 0) = p_0$$

$$s_n = P(S_N = n) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k g_n^{(k)} \text{ für } \; n \geq 1$$

Definition 3 *(Panjer'sche Klasse)*

Das Wahrscheinlichkeitsmaß (p_k) von N gehört zur Panjer'schen Klasse Panjer(a,b) für $a, b \in \mathbb{R}$ wenn $p_r = (a + (b/r))p_{r-1}$ für $r \geq 1$.

Beispiele: $B(n,p)$, $Poi(\lambda)$, $NB(\alpha,p)$.

Abgesehen von degenerierten Wahrscheinlichkeitsmaßen sind diese die einzigen diskreten Verteilungen, die einer Panjer'schen Klasse gehören, siehe Kotz (1969), Sundt und Jewell (1982).

Theorem 3 *(Panjer'sche Rekursion)*

Wenn N der Panjer'schen Klasse $Panjer(a,b)$ gehört und $g_0 = P(X_1 = 0) = 0$, dann gilt

$$s_r = \begin{cases} p_0 & r = 0 \\ \sum_{i=1}^{r}(a + (bi/r))g_i s_{r-i} & r \geq 1 \end{cases}$$

Falls $g_0 = P(X_1 = 0) > 0$ gilt

$$s_r = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} p_k g_0^{(k)} & r = 0 \\ (1 - ag_0)^{-1} \sum_{i=1}^{r}(a + bi/r)g_i s_{r-i} & r \geq 1 \end{cases}$$

Beispiel 5 *Panjer'sche Rekursion für $CPoi(100, LN(1,1))$*
Bild 10.5: Um den 99.9% Quantil ist die Approximation mit Hilfe der Panjer'sche Rekursion ausgezeichnet. Weiter in den Tail nehmen Rundungfehler die Oberhand.

Die gemischte Poisson Verteilung

Für $N \sim Poi(\lambda)$ gilt $E(N) = \lambda = var(N)$. Oft gilt $var(N) > E(N)$ für die Anzahl der Verluste N (*Overdispersion*), was nicht modellierbar mit $N \sim Poi(\lambda)$ ist.

Definition 4 *Eine ZV N mit Verteilungsfunktion*

$$p_N(k) = P(N = k) = \int_0^\infty P(N = k|\Lambda = \lambda) dF_\Lambda(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} dF_\Lambda(\lambda).$$

heißt gemischte Poisson ZV mit Struktur-Verteilungsfunktion F_Λ.

Λ könnte zB. eine Gammaverteilung oder eine log-Normalverteilung sein.

Theorem 4 *Sei N eine gemischte Poisson ZV mit Struktur-Verteilungsfunktion F_Λ. Dann gilt $E(N) = E(\Lambda)$ und $var(N) = E(\Lambda) + var(\Lambda)$. D.h. für nicht-degenerierte Λ besitzt N eine Overdispersion.*

Theorem 5 *(Die Negative Binomial (NB) Verteilung als gemischte Poisson Verteilung)*

Sei N eine gemischte Poisson ZV mit Struktur-Verteilungsfunktion $\Lambda \sim \gamma(\alpha, \beta)$. Dann hat N eine Negative Binomial Verteilung: $N \sim NB(\alpha, \beta/(\beta + 1))$.

Tail von aggregierten Verlustverteilungen

Theorem 6 *(Reguläre Variation der zusammengesetzten Summen-Verteilungen) Sei die ZV S_N eine zusammengesetzte Summe. Wenn ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass $\sum_{k=0}^{\infty}(1+\epsilon)^k p_N(k) < \infty$ und $\bar{G}(x) = x^{-\alpha}L(x)$, wobei $\alpha > 0$ und $L(x)$ eine langsam variierende Funktion ist, dann gilt*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}_{S_n}(x)}{\bar{G}(x)} = \lambda,$$

d.h. F_{S_N} und G haben dasselbe Tail-Verhalten.

Beweis in Embrechts et al. (1997).

Beispiel 6 *Die zusammengestzte Summe S_N für eine gemischte Poisson Verteilung N heißt eine zusammengestezte gemischte Poisson Summe.*

Wenn N eine negative Binomialverteilung $NB(\alpha, \beta/(1+\beta)$, d.h. N ist eine gemischte Poisson Verteilung mit Struktur-Verteilungsfunktion $\gamma(\alpha, \beta)$, dann sind die Bedingungen von Satz (6) erfüllt und S_N besitzt sowie $NB(\alpha, \beta/(1+\beta)$ eine reguläre Variation.

Definition 5 *(stochastischer Prozesse)*

Die Menge der Zufallsvariablen $\{X(t), t \in T\}$ *heißt stochastischer Prozess mit Parameterraum* $T \subseteq \mathbb{R}$ *und Zustandsraum* Z *bestehend aus allen möglichen Realizierungen der Zufallsvariablen* $X(t)$, $t \in T$. *Wenn* T *endlich oder abzählbar ist, dann ist* $\{X(t), t \in T\}$ *ein Prozess mit diskreter Zeit, ansonsten ist* $\{X(t), t \in T\}$ *ein Prozess mit stetiger Zeit. Wenn* Z *eine endliche oder abzählbare Menge ist, dann spricht man von einem diskreten, ansonsten von einem stetigen Prozess.*

Jede Realisierung des stoch. Prozesses $\{X(t), t \in T\}$ *ist eine Funktion* $x: T \to Z, t \mapsto x(t)$. *Diese Funktionen heißen Trajektorien des stoch. Prozesses.*

Definition 6 *(Zähl-Prozesse)*

Ein stoch. Prozess $N = (N(t))_{t \geq 0}$ *mit Zustandraum* $\{0, 1, 2, \ldots\}$ *heißt Zähl-Prozess wenn seine Trajektorien rechts stetige Funktionen sind deren linksseitigen Grenzwerte existieren, und es eine Folge von Zufallsvariablen* $T0 = 0$, T_1,T_2, $\ldots$, *gibt sodass* $P(\lim_{n\to\infty} Tn = \infty) = 1$ *und* $N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} I_{T_k \geq t}$.

Definition 7 *(homogener Poisson Prozess)*

Ein stoch. Prozess $N = (N(t))_{t\geq 0}$ heißt homogener Poisson Prozess (HPP) mit Intensität λ wenn er erfolgende Eigenschaften hat:

(i) N *ist ein Zähl-Prozess*

(ii) $N(0) = 0$, *fast sicher*

(iii) N *hat stationäre und unabhängige Zuwächse*

(iv) *für jedes* $t > 0$, $N(t) \sim Poi(\lambda t)$.

Anmerkung: Die Bedingungen (iii) und (iv) implizieren:

- $N(v) - N(u)$ und $N(t) - N(v)$ unabhängig für alle $0 < u < v < t$.

- $P(N(v) - N(u) = k) = P(N(v - u) = k) = e^{-\lambda(v-u)} \frac{(\lambda(v-u))^k}{k!}$

$N(v) - N(u)$ - Anzahl der Ereignisse (Ansprüche, Verluste) im Intervall $(u, v]$. Durch Stationarität hat sie dieselbe Verteilung wie $N(v - u)$.

Theorem 7 *(Charakterisierung von HPP)*

Sei N ein Zähl-Prozess. Folgende Aussagen sind äquivalent.

(1) N ist ein HPP mit Intensität λ.

(2) N hat stationäre und unabhängige Zuwächse und

$$P(N(t) = 1) = \lambda t + o(t) \text{ für } t \to 0^+$$

$$P(N(t) \geq 2) = o(t) \text{ für } t \to 0^+$$

(3) Die Zeitintervalle zwischen aufeinander folgenden Ereignissen $(\Delta_k = T_k - T_{k-1})_{k \geq 1}$ sind i.i.d. mit Verteilungsfunktion $Exp(\lambda)$.

(4) Für alle $t > 0$, $N(t) \sim Poi(\lambda t)$ und, unter der Bedingung $N(t) = k$ haben alle Eintritt-Zeiten T_1,T_2, ..., T_k dieselbe Verteilung wie eine sortierte Stichprobe von k unabhängigen in $[0, t]$ gleichverteilten ZV. Die bedingte Dichtefunktion ist folglich folgendemaßen gegeben:

$$f_{T_1,\ldots,T_k|N(t)=k}(t_1, \ldots, t_k) = \frac{k!}{t^k} I_{\{0<t_1<\ldots<t_k<t\}}$$

Beweis: Siehe Mikosch (2004), Resnick (1992).

Multivariate Poisson Prozesse

Siehe Lindskog und McNeil (2003), Pfeifer und Nešlehovà (2004), Chaver-Demoulin, Embrechts und Nešlehovà (2005).

Verallgemeinerungen des Poisson Prozesses (PP)

Erneuerungsprozesse: Exponentielle Wartezeit-Verteilung wird durch eine allgemeine Verteilung F_Δ ersetzt.

inhomogene PP: die konstante Intensität wird durch eine deterministische Funktion $\lambda(\cdot)$ ersetzt.

gemischte PP: die deterministische Konstante Intensität wird durch eine ZV Λ ersetzt.

doppelt stochastische oder Cox Prozesse: λ wird durch einen stochastischen Prozess $\{\lambda_t : t \geq 0\}$ ersetzt.

"self exiting" oder Hawkes Prozesse: λ wird durch einen stochastischen Prozess ersetzt, der ausschließlich von den Eintritt-Zeiten vergangener Ereignisse abhängt.

Inhomogene Poisson Prozesse

Definition 8 *Ein Zählprozess N ist ein inhomogener Possion Prozess (IPP) wenn es eine deterministische Funktion $\lambda(s) \geq 0$ gibt, sodass folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(i) *N(0)=0, fast sicher.*

(ii) *N hat unabhängige Zuwächse*

(iii) *Für alle $t \geq 0$, gilt*

$$P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h) \text{ für } h \to 0^+$$

$$P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h) \text{ für } h \to 0^+$$

Die Funktion $\lambda(\cdot)$ heißt Intensität-Funktion, das Integral $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$ heißt Intensitätsmaß (oder kumulierte Intensität-Funktion).

Anmerkung:

Ähnlicher Charakterisierungssatz wie für HPP:
für $0 < s < t$, $N(t) - N(s) \sim Poi(\Lambda(t) - \Lambda(s)$.

Beispiel 7 *(Rekord Verluste)*

Die nichtnegativen ZV X_i, repräsentieren Verluste, sind i.i.d. mit Dichtefunktion $f(x) > 0$ für $x \geq 0$, gegeben.

Sei $N(t) = \sum i = 1^{\infty} I_{\{X_i \leq t \text{ und } X_i > X_j, j=1,\ldots,i-1\}}$

$N(t)$ heißt der Rekord-Prozess.

Für $h, t > 0$ gilt:

$$P(N(t+h) - N(t) \geq 1) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X_i \in (t, t+h] \text{ und } X_{i-1} \leq t, \ldots, X_1 \leq t)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} (F(t+h) - F(t))(F(t))^{i-1} = \frac{F(t+h) - F(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)} h + o(h) \text{ für } h \to 0^+$$

Für $h, t > 0$ gilt weiters: $P((N(t+h) - N(t) \geq 2) \leq$

$$\sum_{i<j} P\left(X_1 \leq t, \ldots, X_{i-1} \leq t, X_i \in (t, t+h], X_{i+1} \leq t+h, \ldots, X_{j-1} \leq t+h, X_j \in (t, t+h]\right)$$

$$= \left(\int_t^{t+h} f(s)ds\right)^2 \sum_{i<j} (F(t))^{i-1}(F(t+h))^{j-i-1} = o(h^2) \text{ für } h \to 0^+$$

$N(t)$ ist IPP mit Intensität-Funktion $\lambda(t) = f(t)/(1 - F(t))$.

IPP $\Rightarrow$ HPP

Theorem 8 *(Veränderung der Zeit, operationelle Zeit)*

Sei N ein IPP mit streng monoton steigender Intensität-Funktion Λ. Sei $\tilde{N}(t) = N(\Lambda^{-1}(t))$. $\tilde{N}$ ist eine HPP mit Intensität 1.

HPP $\Rightarrow$ IPP

Random Sampling:
Sei λ eine Intensität-Funktion, sodass $\lambda(s) \leq c < \infty$ für $s \geq 0$. Starte mit einem HPP mit Intensität c. Seien $T_0 = 0$, T_1, T_2, ... seine Ereignis-Eintritt-Zeiten. Kosntruiere $\tilde{N}$ aus $(T_i)_{i \geq 0}$ in dem die Ereignisse T_i unabhängig mit Wahrsch. $1 - (\lambda(T_i)/c)$ gelöscht werden. $\tilde{N}$ besteht aus den übrig gebliebenen Punkten und ist IPP mit Intensität-Funktion $\lambda(s)$.

Beispiel 8 *(Gemischte Poisson Prozesse)*

Zählprozesse in Kredit-Risikomodelle: T_k *entsprechen den Kredit-Ereignissen wie Zahlunsunfähigkeiten oder Herabstufungen.*

$$P(T_1 \geq t) = P(N(t) = 0)$$

Falls $N(t)$ *HPP mit Intensität* λ*, dann gilt*

$$P(T_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}.$$

Fall N *gemischter PP mit Struktur-Verteilungsfunktion* F_Λ*, dann gilt:*

$$P(T_1 > t) = P(N(t) = 0) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dF_\Lambda(t) = \widehat{F}_\Lambda(t)$$

Für $\Lambda \sim Ga(\alpha, \beta)$ *(die negative binomial Verteilung) und* $t \geq 0$ *gilt:*

$$P(T_1 > t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda} d\lambda = \beta^\alpha (t + \beta)^{-\alpha}$$

D.h. $T_1 \sim Pa(\alpha, \beta)$.