Theorem 9 *Sei G eine Verteilungsfunktion in $\mathbb{R}$.*

1. *Quantil-Transformation:*
   Wenn $U \sim U(0,1)$ (standard Gleichverteilung), dann gilt $P(G^{\leftarrow}(U) \leq x) = G(x)$.

2. *Wahrscheinlichkeit-Transformation:*
   Sei Y eine Zufallsvariable mit stetiger Verteilungsfunktion G. Es gilt $G(Y) \sim U(0,1)$.

Theorem 10 *(Sklar, 1959)*
Sei $F\colon \mathbb{R}^d \to [0,1]$ eine Gesamtverteilungsfunktion mit Randverteilungsfunktionen $F_1,\ldots,F_d$. Es existiert eine Copula C, sodass für alle $x_1, x_2, \ldots, x_d \in \bar{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_d) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots, F_d(x_d)). \tag{4}$$

Wenn $F_1,\ldots,F_d$ stetig, dann ist C eindeutig.

Vice-versa, sei C eine Copula und $F_1,\ldots,F_d$ Verteilungsfunktionen. Dann ist die Funktion F aus (4) eine Gesamtverteilungsfunktion mit Randverteilungsfunktionen $F_1,\ldots,F_d$.

C aus (4) heißt Copula von F. Für ein Zufallsvektor $X \in \mathbb{R}^d$ mit Gesamtverteilungsfunktion F heißt C auch Copula von X.

Korollar 1 *Sei F eine Gesamtverteilungsfunktion mit stetigen Randverteilungsfunktionen $F_1,\ldots,F_d$. Die eindeutige Copula von F ist folgendermaßen gegeben:*

$$C(u_1, u_2, \ldots, u_d) = F(F_1^{\leftarrow}(u_1), F_2^{\leftarrow}(u_2), \ldots, F_d^{\leftarrow}(u_d)).$$

Theorem 11 *(Copula-Invarianz bzgl. streng monotonen Transformationen)*
Sei $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d)^T$ ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen $F_1, F_2, \ldots, F_d$ und Copula C. Seien $T_1, T_2, \ldots, T_d$ streng monoton steigende Funktionen in $\mathbb{R}$. Dann ist C auch eine Copula von $(T_1(X_1), T_2(X_2), \ldots, T_d(X_d))^T$.

Beispiel 9 *Sei $X \sim N_d(0, \Sigma)$ wobei $\Sigma = R$ die Korrelationsmatrix von X ist. Seien ϕ_R und ϕ die Verteilungsfunktionen von X bzw. X_1. Die Copula von X ist die so genannte Gauss'sche Copula C_R^{Ga}:*

$$C_R^{Ga}(u_1, u_2, \ldots, u_d) = \phi_R(\phi^{-1}(u_1), \phi^{-1}(u_2), \ldots, \phi^{-1}(u_d)).$$

C_R^{Ga} ist auch die Copula jeder nicht degenerierten Normalverteilung $N_d(\mu, \Sigma)$ mit Korrelationsmatrix R.

Für $d = 2$ und $\rho = R_{12} \in (-1, 1)$ gilt:

$$C_R^{Ga}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left\{\frac{-(x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right\} dx_1 dx_2$$

Theorem 12 *(Fréchet Schranken)*
Für jede Copula gilt

$$\max\left\{\sum_{k=1}^{d} u_k - d + 1, 0\right\} \le C(u_1, u_2, \ldots, u_d) \le \min\{u_1, u_2, \ldots, u_d\}.$$

Notation: Untere Schranke =: W_d und obere Schranke =: M_d, für $d \geq 2$. Für $d = 2$ setzen wir $M := M_2$, $W := W_2$.

Anmerkung: Ein analoges Ergebnis wie im Satz 12 gilt für allgemeine multivariate Verteilungen F mit Randverteilungen F_i, $1 \le i \le d$:

$$\max\left\{\sum_{k=1}^{d} F_k(x_k) - d + 1, 0\right\} \le F(x_1, x_2, \ldots, x_d) \le \min\{F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots, F_d(x_d)\}.$$

Beispiel 10 *Zeigen Sie, dass die Fréchet untere Schranke W_d für $d \geq 3$ keine Copula ist.*

Hinweis: Verwenden Sie die Rechtecksungleichung

$$\sum_{k_1=1}^{2} \sum_{k_2=1}^{2} \ldots \sum_{k_d=1}^{2} (-1)^{k_1+k_2+\ldots+k_d} W_d(u_{1k_1}, u_{2k_2}, \ldots, u_{dk_d}) \geq 0$$

wobei $(a_1, a_2, \ldots, a_d)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_d) \in [0,1]^d$ mit $a_k \le b_k$ und $u_{j1} = a_j$ und $u_{j2} = b_j$ für $j \in \{1, 2, \ldots, d\}$. Zeigen Sie, dass diese Ungleichung nicht erfüllt ist falls $d \geq 3$ und $a_i = \frac{1}{2}$, $b_i = 1$, for $i = 1, 2, \ldots, d$.

Theorem 13 *(Ohne Beweis)*
Für jedes $d \geq 3$ und jedes $u \in [0,1]^d$, es existiert eine Copula $C_{d,u}$, sodass $C_{d,u}(u) = W_d(u)$.

Anmerkung 1: Für jedes $d \geq 2$ ist die Fréchet obere Schranke M_d eine Copula.

Überprüfung der 3 Copula-Axiome ist einfach.

Anmerkung 2: Weiters sind M und W Copulas.

Hinweis: Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_X. Seien $Y = T(X)$ und $Z = S(X)$ zwei Zufallsvariablen, wobei T und S zwei streng monotone Funktionen, T steigend und S fallend, sind. Nun ist M die Copula von $(X, T(X))^T$ und W die Copula von $(X, S(X))^T$.

Co-Monotonie und Anti-Monotonie

Definition 9 *X_1 und X_2 heißen co-monoton wenn M eine Copula von $(X_1, X_2)^T$ ist. X_1 und X_2 heißen anti-monoton wenn W eine Copula von $(X_1, X_2)^T$ ist.*

Theorem 14 *Angenommen eine Copula von $(X_1, X_2)^T$ ist W oder M. Es existieren dann zwei monotone Funktionen $\alpha, \beta \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine Zufallsvariable Z, sodass*

$$(X_1, X_2) \stackrel{d}{=} (\alpha(Z), \beta(Z)) .$$

Falls M die Copula von $(X_1, X_2)^T$ ist, dann sind α und β monoton steigend, falls W die Copula von $(X_1, X_2)^T$ ist, dann ist α monoton steigend und β monoton fallend.

Wenn die Randverteilungen F_1 und F_2 von $(X_1, X_2)^T$ stetig sind, dann gilt:

$C = W \Longleftrightarrow X_2 = T(X_1)$ *fast sicher* $, T = F_2^{\leftarrow} \circ (1 - F_1)$ *monoton fallend*

$C = M \Longleftrightarrow X_2 = T(X_1)$ *fast sicher* $, T = F_2^{\leftarrow} \circ F_1$ *monoton steigend*

Beweis: In McNeil et al., 2005.

Theorem 15 *Sei* $(X_1, X_2)^T$ *ein Zufallsvektor mit Randverteilungsfunktionen* F_1*,* F_2 *und einer nicht spezifizierten Abhängigkeitsstruktur. Sei* $var(X_1), var(X_2) \in (0, \infty)$*. Dann gilt:*

1. *Die Menge der möglichen linearen Korrelationen von* X_1 *und* X_2 *ist ein abgeschlossenes Intervall* $[\rho_{L,min}; \rho_{L,max}]$ *mit* $0 \in [\rho_{L,min}; \rho_{L,max}]$.

2. *Die minimale lineare Korrelation wird dann und nur dann erreicht wenn* X_1 *und* X_2 *anti-monoton sind. Die maximale lineare Korrelation wird dann und nur dann erreicht wenn* X_1 *und* X_2 *co-monoton sind.*

Im Beweis wird die Höffding'sche Gleichung verwendet:

Lemma 3 *(Die Höffding'sche Gleichung)*

Sei $(X_1, X_2)^T$ *ein Zufallsvektor mit Gesamtverteilung* F *und Randverteilungen* F_1*,* F_2*. Wenn* $cov(X_1, X_2) < \infty$ *dann gilt:*

$$cov(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (F(x_1, x_2) - F_1(x_1)F_2(x_2))dx_1 dx_2.$$

Beweis in McNeil et al.,2005.

Beispiel 11 *Sei* $X_1 \sim Lognormal(0,1)$ *und* $X_2 \sim Lognormal(0,\sigma^2)$, $\sigma > 0$. *Bestimmen Sie* $\rho_{L,min}(X_1, X_2)$ *und* $\rho_{L,max}(X_1, X_2)$.

Beispiel 12 *Betrachten Sie zwei ZV* Z_1 *und* Z_2, *die die Verluste zweier Portfolii darstellen. Sei* $Z_1 \sim N(0,1)$, $Z_2 \sim N(0,1)$ *und* $\rho_L(Z_1, Z_2) = 0$.

Geben Sie zwei Zufallsvektoren $(X_1, X_2)^T$ *und* $(Y_1, Y_2)^T$ *mit unterschiedlichen Gesamtverteilungsfunktionen an, für die* $F^{\leftarrow}_{X_1+X_2}(\alpha) \neq F^{\leftarrow}_{Y_1+Y_2}(\alpha)$ *gilt und die obigen Annahmen erfüllt sind, d.h.* $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \sim N(0,1)$ *und* $\rho_L(X_1, X_2) = 0$, $\rho_L(Y_1, Y_2) = 0$,.

Fazit: Aus den Verlustverteilungen der zwei Teilen eines Portfolios und aus der Korrelation der jeweiligen Verluste lassen sich keine Schlüsse über die Verlustverteilung des Gesamtportfolios ziehen.