

Konvexe Risikomaße

Betrachte die Eigenschaft

(C5) Konvexität:

$\forall X_1, X_2 \in M, \forall \lambda \in [0, 1]$ gilt

$$\rho(\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2) \leq \lambda\rho(X_1) + (1 - \lambda)\rho(X_2).$$

(C5) ist schwächer als (C2) und (C3), d.h. (C2) und (C3) zusammen implizieren (C5) aber nicht umgekehrt.

Definition 7 Ein Risikomaß ρ , das die Eigenschaften (C1), (C4) und (C5) besitzt, heißt konvex auf M .

Beobachtung: VaR ist i.A. nicht kohärent

Sei das Wahrscheinlichkeitsmaß P durch einer beliebigen kontinuierlichen oder diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung F definiert.

$VaR_\alpha(F) = F^{\leftarrow}(\alpha)$ besitzt die Eigenschaften (C1), (C3) und (C4), jedoch i.A. nicht die Subadditivität

Beispiel 8 Sei das Wahrscheinlichkeitsmaß P durch die Binomialverteilung $B(p, n)$ für $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0, 1)$, definiert.

Wir zeigen: $VaR_\alpha(B(p, n))$ ist nicht subadditiv.

ZB.: Berechnen Sie den VaR der Verluste eines Bond-Portfolios bestehend aus 100 Bonds, die unabhängig von einander mit Wahrscheinlichkeit p defaultieren. Beobachten Sie, dass dieser Wert größer als das Hunderfache des VaRs des Verlustes eines einzigen Bonds ist.

Theorem 6 Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $M \subseteq L^{(0)}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ die Menge aller in (Ω, \mathcal{F}, P) definierten Zufallsvariablen mit einer kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsverteilung F . $CVaR_\alpha$ ist eine kohärentes Risikomaß in M , $\forall \alpha \in (0, 1)$.

Elliptische Verteilungen und Portfoliooptimierung

Ein Investor möchte in d (risikoreichen) Assets investieren. Sei $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)^T$ der Zufallsvektor der Asset>Returns mit $E(X) = \mu$ und $Cov(X) = \Sigma$.

Sei \mathcal{P} die Klasse aller Portfolios bestehend aus den obigen d Aktien.

Jedes (long-short) Portfolio aus \mathcal{P} ist eindeutig durch den Gewichtsvektor $w = (w_i) \in \mathbb{R}^d$ definiert. $w_i > 0$ entspricht einer Long-Investition und $w_i < 0$ entspricht einer Short-Investition. Daher:

$$\mathcal{P} = \left\{ w = (w_i) \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^d |w_i| = 1 \right\}$$

Die Portfoliorendite ist die Zufallsvariable $Z(w) = \sum_{i=1}^d w_i X_i$.

Die erwartete Portfoliorendite: $E(Z(w)) = w^T \mu$.

Es gelte $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$ mit $E(X_k^2) < \infty$ und $\Sigma = cov(X)$.

Sei \mathcal{P}_m die Klasse jener PF aus \mathcal{P} sodass $E(Z(w)) = m$, $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$.

$$\mathcal{P}_m = \left\{ w = (w_i) \in \mathbb{R}^d, \sum_{i=1}^d |w_i| = 1, w^T \mu = m \right\}$$

Das Mean-Variance PF-Opt.modell (Markowitz 1952, 1987) lautet

$$\min_{w \in \mathcal{P}_m} \text{var}(Z(w)) \quad (1)$$

oder äquivalent (siehe zB. Campbell et al. (1997))

$$\begin{aligned} & \min_w w^T \Sigma w \\ & \text{sodass} \\ & w^T \mu = m \\ & \sum_{i=1}^d |w_i| = 1 \end{aligned}$$

Sei ρ ein Risikomaß. Das **Mean- ρ PF-Optimierungsmodell** lautet:

$$\min_{w \in \mathcal{P}_m} \rho(Z(w)) \quad (2)$$

Sei $\rho = \text{VaR}_\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$. Das **Mean-VaR PF-Optimierungsmodell** lautet:

$$\min_{w \in \mathcal{P}_m} \text{VaR}_\alpha(Z(w)) \quad (3)$$

Frage: Wie hängen die Probleme (1) und (2) (insbesondere (3)) zusammen?

Theorem 7 Sei M die Menge der erwarteten Rendite der Portfolii aus \mathcal{P} . Die Risikofaktoren, d.h. die Rendite der einzelnen Aktien seien elliptisch verteilt, $X = (X_1, X_2, \dots, X_d) \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$ für gegebene $\mu \in \mathbb{R}^d$, $\sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ und $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. VaR_α ist kohärent auf M , für jedes $\alpha \in (0.5, 1)$.

Theorem 8 (Embrechts et al., 2002)

Sei $X = (X_1, X_2, \dots, X_d) = \mu + AY$ elliptisch verteilt mit $\mu \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$, und einem sphärisch verteilten Zufallsvektor $Y \sim S_k(\psi)$ und $0 < E(X_k^2) < \infty$, $\forall k$. Sei ρ ein Risikomaß, das die Eigenschaften (C1) und (C3) besitzt, und $\rho(Y_1) > 0$ erfüllt, wobei Y_1 die erste Komponente des sphärisch verteilten Zufallsvektors Y ist.

Es gilt dann:

$$\arg \min \{ \rho(Z(w)) : w \in \mathcal{P}_m \} = \arg \min \{ \text{var}(Z(w)) : w \in \mathcal{P}_m \}$$

Einführung in Copulas: Grundlegende Eigenschaften

Definition 8 Eine d -dimensionale Copula ist eine Verteilungsfunktion auf $[0, 1]^d$ deren Randverteilungen jeweils standard gleichverteilt auf $[0, 1]$ sind.

Oder äquivalent:

Eine Copula C ist eine Funktion $C: [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$, die folgende Eigenschaften hat:

1. $C(u_1, u_2, \dots, u_d)$ ist mon. steigend in jeder Variable u_i , $1 \leq i \leq d$.
2. $C(1, 1, \dots, 1, u_k, 1, \dots, 1) = u_k$ für jedes $k \in \{1, \dots, d\}$, $u_k \in [0, 1]$.
3. Folgende Ungleichung (sogenannte Rechtecksungleichung) gilt für alle $(a_1, a_2, \dots, a_d), (b_1, b_2, \dots, b_d) \in [0, 1]^d$ mit $a_k \leq b_k, \forall k \in \{1, 2, \dots, d\}$:

$$\sum_{k_1=1}^2 \dots \sum_{k_d=1}^2 (-1)^{k_1+k_2+\dots+k_d} C(u_{1k_1}, u_{2k_2}, \dots, u_{dk_d}) \geq 0$$

wobei $u_{j1} = a_j$ und $u_{j2} = b_j$.

Anmerkung: Für $2 \leq k \leq d$ sind die k -dimensionalen Randverteilungen einer d -dimensionalen Copula wieder Copulas, k -dimensionale Copulas.

Lemma 1 Sei $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton steigende Funktion mit $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ und $h^{\leftarrow}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die verallgemeinerte inverse Funktion von h . Es gelten dann folgende Aussagen:

1. h ist stetig $\iff h^{\leftarrow}$ ist streng monoton steigend.

2. h ist streng monoton steigend $\iff h^{\leftarrow}$ ist stetig.

3. $h^{\leftarrow}(h(x)) \leq x$

4. h ist streng monoton steigend $\implies h^{\leftarrow}(h(x)) = x$.

5. h ist stetig $\implies h(h^{\leftarrow}(y)) = y$.

Lemma 2 Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F . Es gilt: $P(F^{\leftarrow}(F(X)) = X) = 1$, d.h. $F^{\leftarrow}(F(X)) \stackrel{f.s.}{=} X$