

Tail-Abhängigkeit

Definition 1 Sei $(X_1, X_2)^T$ ein Zufallsvektor mit Randverteilungen F_1 und F_2 . Der Koeffizient der oberen Tail-Abhängigkeit von $(X_1, X_2)^T$ wird folgendermaßen definiert:

$$\lambda_U(X_1, X_2) = \lim_{u \rightarrow 1^-} P(X_2 > F_2^{\leftarrow}(u) | X_1 > F_1^{\leftarrow}(u))$$

vorausgesetzt der Limes existiert.

Der Koeffizient der unteren Tail-Abhängigkeit von $(X_1, X_2)^T$ wird folgendermaßen definiert:

$$\lambda_L(X_1, X_2) = \lim_{u \rightarrow 0^+} P(X_2 \leq F_2^{\leftarrow}(u) | X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(u))$$

vorausgesetzt der Limes existiert.

Wenn $\lambda_U > 0$ ($\lambda_L > 0$) heißt es, $(X_1, X_2)^T$ hat eine obere (untere) Tail-Abhängigkeit.

(Siehe Joe 1997, Schmidt und Stadtmüller 2002)

Übung 1 Sei $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$ und $X_2 = X_1^2$. Bestimmen Sie $\lambda_U(X_1, X_2)$, $\lambda_L(X_1, X_2)$ und zeigen Sie, dass $(X_1, X_2)^T$ eine obere und eine untere Tail-Abhängigkeit hat. Berechnen Sie auch den linearen Korrelationskoeffizienten $\rho_L(X_1, X_2)$.

Multivariate elliptische Verteilungen

a) Die multivariate Normalverteilung

Definition 2 Der Zufallsvektor $(X_1, X_2, \dots, X_d)^T$ hat eine multivariate Normalverteilung (oder eine multivariate Gauss'sche Verteilung)

wenn $X \stackrel{d}{=} \mu + AZ$, wobei $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_k)^T$ ein Vektor von i.i.d. normalverteilten ZV ($Z_i \sim N(0, 1)$, $\forall i = 1, 2, \dots, k$), $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$ ist eine konstante Matrix und $\mu \in \mathbb{R}^d$ ist ein konstanter Vektor.

Für so einen Zufallsvektor X gilt: $E(X) = \mu$, $\text{cov}(X) = \Sigma = AA^T$ (Σ positiv semidefinit). Notation: $X \sim N_d(\mu, \Sigma)$.

Theorem 1 (Multivariate Normalverteilung: äquiv. Definitionen)

1. $X \sim N_d(\mu, \Sigma)$ für einen Vektor $\mu \in \mathbb{R}^d$ und eine positiv semidefinite Matrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$, dann und nur dann wenn $\forall a \in \mathbb{R}^d$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_d)^T$, die Zufallsvariable $a^T X$ normal verteilt ist.
2. Ein Zufallsvektor $X \in \mathbb{R}^d$ ist multivariat normal verteilt dann und nur dann wenn seine charakteristische Funktion folgendermaßen gegeben ist:

$$\phi_X(t) = E(\exp\{it^T X\}) = \exp\{it^T \mu - \frac{1}{2}t^T \Sigma t\}$$

für einen Vektor $\mu \in \mathbb{R}^d$ und eine positiv semidefinite Matrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$.

3. Ein Zufallsvektor $X \in \mathbb{R}^d$ mit $E(X) = \mu$ und $\text{cov}(X) = \Sigma$, wobei die Determinante von Σ positiv ist ($\det(\Sigma) := |\Sigma| > 0$), ist normal verteilt, d.h. $X \sim N_d(\mu, \Sigma)$, dann und nur dann wenn seine Dichtefunktion folgendermaßen gegeben ist

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\Sigma|}} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)}{2} \right\}.$$

Beweis: (siehe zB. Gut 1995)

Theorem 2 (*Eigenschaften der multivariaten Normalverteilung*)

Für $X \sim N_d(\mu, \Sigma)$ gilt:

Lineare Transformation:

Für $B \in \mathbb{R}^{k \times d}$ und $b \in \mathbb{R}^k$. Es gilt dann $BX + b \in N_k(B\mu + b, B\Sigma B^T)$.

Randverteilungen:

Setze $X^T = \left(X^{(1)T}, X^{(2)T} \right)$ für $X^{(1)T} = (X_1, X_2, \dots, X_k)^T$ und $X^{(2)T} = (X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_d)^T$ und analog

$$\mu^T = \left(\mu^{(1)T}, \mu^{(2)T} \right) \text{ und } \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma^{(1,1)} & \Sigma^{(1,2)} \\ \Sigma^{(2,1)} & \Sigma^{(2,2)} \end{pmatrix}.$$

Es gilt dann $X^{(1)} \sim N_k(\mu^{(1)}, \Sigma^{(1,1)})$ und $X^{(2)} \sim N_{d-k}(\mu^{(2)}, \Sigma^{(2,2)})$.

Bedingte Verteilungen:

Wenn Σ regulär, dann ist auch der bedingte Z.Vektor $X^{(2)}|X^{(1)} = x^{(1)}$ multivariat normal verteilt

$$X^{(2)}|X^{(1)} = x^{(1)} \sim N_{d-k}\left(\mu^{(2,1)}, \Sigma^{(22,1)}\right) \text{ wobei}$$

$$\mu^{(2,1)} = \mu^{(2)} + \Sigma^{(2,1)}\left(\Sigma^{(1,1)}\right)^{-1}\left(x^{(1)} - \mu^{(1)}\right) \text{ und}$$

$$\Sigma^{(22,1)} = \Sigma^{(2,2)} - \Sigma^{(2,1)}\left(\Sigma^{(1,1)}\right)^{-1}\Sigma^{(1,2)}.$$

Quadratische Formen:

Wenn Σ regulär, dann gilt $D^2 = (X - \mu)^T \Sigma^{-1} (X - \mu) \sim \chi_d^2$.
Die Zufallsvariable D heißt *Mahalanobis Distanz*.

Faltung:

Seien $X \sim N_d(\mu, \Sigma)$ und $Y \sim N_d(\tilde{\mu}, \tilde{\Sigma})$ zwei unabhängige Zufallsvektoren. Es gilt dann $X + Y \sim N_d(\mu + \tilde{\mu}, \Sigma + \tilde{\Sigma})$.

b) Varianz-gemischte Normalverteilungen

Definition 3 Ein Zufallsvektor $X \in \mathbb{R}^d$ hat eine multivariate Varianz-gemischte Normalverteilung wenn $X \stackrel{d}{=} \mu + WAZ$ wobei: $Z \sim N_k(0, I)$, $W \geq 0$ ist eine von Z unabhängige positive Zufallsvariable, $\mu \in \mathbb{R}^d$ ist ein konstanter Vektor, $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$ ist eine konstante Matrix, und I ist die Einheitsmatrix.

Unter der Bedingung $W = w$ ist X normalverteilt: $X \sim N_d(\mu, w^2 \Sigma)$, wobei $\Sigma = AA^T$.

$E(X) = \mu$ und $cov(X) = E(W^2 AZZ^T A^T) = E(W^2) \Sigma$ falls $E(W^2) < \infty$

Beispiel 4 Die multivariate t_α -Verteilung

Sei $Y \sim IG(\alpha, \beta)$ (Inverse Gamma-Verteilung) mit Dichtefunktion:

$$f_{\alpha, \beta}(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-(\alpha+1)} \exp(-\beta/x) \quad x > 0, \alpha > 0, \beta > 0$$

Dann gilt:

$$E(Y) = \frac{\beta}{\alpha - 1} \quad \text{für } \alpha > 1, \quad \text{var}(Y) = \frac{\beta^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)} \quad \text{für } \alpha > 2$$

Sei $W^2 \sim IG(\alpha/2, \alpha/2)$. Dann ist die Verteilung von $X = \mu + WAZ$ eine multivariate t_α Verteilung mit α Freiheitsgraden: $X \sim t_d(\alpha, \mu, \Sigma)$.

$$cov(X) = E(W^2) \Sigma = \frac{\alpha}{\alpha - 2} \Sigma$$

c) Sphärische Verteilungen

Definition 4 Ein Zufallsvektor $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)^T$ hat eine sphärische Verteilung wenn für jede orthogonale Matrix $U \in \mathbb{R}^{d \times d}$ die Gleichung $UX \stackrel{d}{=} X$ gilt.

Theorem 3 Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

1. Der Zufallsvektor $X \in \mathbb{R}^d$ hat eine sphärische Verteilung.
2. Es existiert eine Funktion $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sodass die charakteristische Funktion von X folgendermaßen gegeben wird:

$$\phi_X(t) = \psi(t^T t) = \psi(t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_d^2)$$

3. Für jeden Vektor $a \in \mathbb{R}^d$ gilt $a^T X \stackrel{d}{=} \|a\| X_1$ wobei $\|a\|^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_d^2$.
4. X lässt sich als $X \stackrel{d}{=} RS$ repräsentieren, wobei der Zufallsvektor $S \in \mathbb{R}^d$ gleichmäßig verteilt auf der Einheitskugel S^{d-1} , $S^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d: \|x\| = 1\}$, ist, und $R \geq 0$ eine von S unabhängige ZV ist.

Notation einer sphärischen Verteilung: $X \sim S_d(\psi)$

Beispiel 5 Die standard Normalverteilung ist eine sphärische Verteilungen.

Sei $X \sim N_d(0, I)$. Dann $X \sim S_d(\psi)$ mit $\psi = \exp(-x/2)$.

Tatsächlich: $\phi_X(t) = \exp\{it^T 0 - \frac{1}{2}t^T I t\} = \exp\{-t^T t/2\} = \psi(t^T t)$.

Sei $X = RS$ die stochastische Darstellung von $X \sim N_d(0, I)$. Es gilt $\|X\|^2 \stackrel{d}{=} R^2 \sim \chi_d^2$;

Simulation einer sphärischen Verteilung:

- (i) Simuliere s aus einer gleichmäßig verteilten Zufallsvektor in S^{d-1} (zB. in dem y aus einer multivariaten Standard Normalverteilung $Y \sim N_d(0, I)$ simuliert und $s = y/\|y\|$ gesetzt wird).
- (ii) Simuliere r aus R .
- (iii) Setze $x = rs$.

d) Elliptische Verteilungen

Definition 5 Ein Zufallsvektor $X \in \mathbb{R}^d$ hat eine elliptische Verteilung wenn $X \stackrel{d}{=} \mu + AY$, wobei $Y \sim S_k(\psi)$, $\mu \in \mathbb{R}^d$ ist ein konstanter Vektor und $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$ ist eine konstante Matrix.

Die charakteristische Funktion:

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= E(\exp\{it^T X\}) = E(\exp\{it^T(\mu + AY)\}) = \exp\{it^T \mu\} E(\exp\{i(A^T t)^T Y\}) \\ &= \exp\{it^T \mu\} \psi(t^T \Sigma t),\end{aligned}$$

wobei $\Sigma = AA^T$.

Notation elliptische Verteilungen: $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$

μ heißt Positionsparameter (*location parameter*),

Σ heißt Dispersionsparameter (*dispersion parameter*),

ψ heißt charakteristischer Generator der elliptischen Verteilung.

Falls $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ regulär, dann gilt folgende Relation zwischen elliptischen und sphärischen Verteilungen:

$$X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi) \Leftrightarrow A^{-1}(X - \mu) \sim S_d(\psi), \quad A \in \mathbb{R}^{d \times d}, AA^T = \Sigma$$

Theorem 4 (*Stochastische Darstellung der elliptischen Verteilung*)

Sei $X \in \mathbb{R}^d$ ein d -dimensionaler Zufallsvektor.

$X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$ dann und nur dann wenn $X \stackrel{d}{=} \mu + RAS$, wobei $S \in \mathbb{R}^k$ ist ein auf der Einheitskugel \mathcal{S}^{k-1} gleichverteilter Zufallsvektor, $R \geq 0$ ist eine von S unabhängige nicht negative Zufallsvariable, $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$ ist eine konstante Matrix ($\Sigma = AA^T$) und $\mu \in \mathbb{R}^d$ ist ein konstanter Vektor.

Simulation einer elliptischen Verteilung:

- (i) Simuliere s aus einer gleichmäßig verteilten Zufallsvektor in \mathcal{S}^{d-1} (zB. in dem y aus einer multivariaten Standard Normalverteilung $Y \sim N_d(0, I)$ simuliert und $s = y/\|y\|$ gesetzt wird).
- (ii) Simuliere r aus R .
- (iii) Setze $x = \mu + rAs$.

Beispiel 6 (Multivariate Normalverteilung)

Sei $X \sim N(\mu, \Sigma)$. Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$, sodass $X \stackrel{d}{=} \mu + AZ$ wobei $Z \in N_k(0, I)$ und $AA^T = \Sigma$. Weiters gilt $Z = RS$ wobei S ein gleichmäßig verteilter Zufallsvektor in S^{k-1} ist und $R^2 \sim \chi_k^2$. Daraus folgt $X \stackrel{d}{=} \mu + RAS$ und daher $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$ mit $\psi(x) = \exp\{-x/2\}$.

Beispiel 7 (Multivariate normal variance mixture)

Sei $Z \sim N_d(0, I)$ ein normal-verteilter Zufallsvektor. Z ist sphärisch-verteilt mit stochastischer Darstellung $Z \stackrel{d}{=} VS$ wobei $V^2 = \|Z\|^2 \sim \chi_d^2$. Sei $X = \mu + WAZ$ eine Varianz-gemischte Normalverteilung. Dann gilt $X \stackrel{d}{=} \mu + VWAS$ wobei $V^2 \sim \chi_d^2$ und VW eine nicht-negative von S unabhängige ZV ist. D.h., X ist elliptisch verteilt mit $R = VW$.

Theorem 5 (*Eigenschaften der elliptischen Verteilung*)

Sei $X \sim E_k(\mu, \Sigma, \psi)$. X hat folgende Eigenschaften:

Lineare Transformation:

Für $B \in \mathbb{R}^{k \times d}$ und $b \in \mathbb{R}^k$ gilt:

$$BX + b \in E_k(B\mu + b, B\Sigma B^T, \psi).$$

Randverteilungen:

Setze $X^T = (X^{(1)T}, X^{(2)T})$ für

$X^{(1)T} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ und $X^{(2)T} = (X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_k)^T$ und analog

$\mu^T = (\mu^{(1)T}, \mu^{(2)T})$ sowie $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma^{(1,1)} & \Sigma^{(1,2)} \\ \Sigma^{(2,1)} & \Sigma^{(2,2)} \end{pmatrix}$. Es gilt dann

$X_1 \sim N_n(\mu^{(1)}, \Sigma^{(1,1)}, \psi)$ und $X_2 \sim N_{k-n}(\mu^{(2)}, \Sigma^{(2,2)}, \psi)$.

Bedingte Verteilungen:

Wenn Σ regulär, dann ist auch die bedingte Verteilung $X^{(2)} \mid X^{(1)} = x^{(1)}$ elliptisch verteilt:

$$X^{(2)} \mid X^{(1)} = x^{(1)} \sim N_{k-n}(\mu^{(2,1)}, \Sigma^{(22,1)}, \tilde{\psi})$$

wobei

$$\mu^{(2,1)} = \mu^{(2)} + \Sigma^{(2,1)} \left(\Sigma^{(1,1)} \right)^{-1} \left(x^{(1)} - \mu^{(1)} \right)$$

und

$$\Sigma^{(22,1)} = \Sigma^{(2,2)} - \Sigma^{(2,1)} \left(\Sigma^{(1,1)} \right)^{-1} \Sigma^{(1,2)}.$$

Typischerweise sind $\tilde{\psi}$ und ψ unterschiedlich (siehe Fang, Katz und Ng 1987).

Quadratische Formen:

Wenn Σ regulär, dann gilt

$$D^2 = (X - \mu)^T \Sigma^{-1} (X - \mu) \sim R^2.$$

wobei R die nicht-negative ZV aus der stochastischen Darstellung $Y = RS$ der sphärischen Verteilung Y mit $S \sim U(\mathcal{S}^{(d-1)})$ und $X = \mu + AY$ ist. Die Zufallsvariable D heißt *Mahalanobis Distanz*.

Faltung:

Seien $X \sim E_k(\mu, \Sigma, \psi)$ und $Y \sim E_k(\tilde{\mu}, \Sigma, \tilde{\psi})$ zwei unabhängige Zufallsvektoren. Es gilt dann $X + Y \sim E_k(\mu + \tilde{\mu}, \Sigma, \bar{\psi})$ wobei $\bar{\psi} = \psi \tilde{\psi}$.

Achtung: Σ muss i.a. dieselbe für X und Y sein.

Anmerkung: Aus $X \sim E_k(\mu, I_k, \psi)$ folgt nicht, dass die Komponenten von X unabhängig sind. Die Komponenten von X sind dann und nur dann unabhängig, wenn X multivariat normalverteilt mit der Einheitsmatrix als Kovarianzmatrix ist.

Koherente Risikomaße

Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Ereignismenge Ω , Ereignisalgebra \mathcal{F} und Wahrscheinlichkeitsmaß P .

Sei $L^{(0)}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ die Menge aller Zufallsgrößen aus (Ω, \mathcal{F}) , die fast sicher endlich sind.

Sei $M \subseteq L^{(0)}$.

Sei $\rho: M \rightarrow \mathbb{R}$ ein Risikomaß in M

Definition 6 Ein Risikomaß ρ , das folgende Eigenschaften besitzt, heißt koherent auf M :

(C1) *Invarianz bzgl. Translation:*

$$\rho(X + r) = \rho(X) + r, \text{ für jede Konstante } r \text{ und jedes } X \in M.$$

(C2) *Subadditivität:*

$$\forall X_1, X_2 \in M \text{ gilt } \rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2).$$

(C3) *Positive Homogenität:*

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X), \forall \lambda \geq 0, \forall X \in M.$$

(C4) *Monotonie:*

$$\forall X_1, X_2 \in M \text{ gilt } X_1 \stackrel{f.s.}{\leq} X_2 \implies \rho(X_1) \leq \rho(X_2).$$