Multivariate Verteilungen

Zufallsvektoren und Modellierung der Abhängigkeiten

Ziel: Modellierung der Veränderungen der Risikofaktoren
$X_n = (X_{n,1}, X_{n,2}, \ldots, X_{n,d})$

Annahme: $X_{n,i}$ und $X_{n,j}$ sind abhängig aber $X_{n,i}$ und $X_{n\pm k,j}$ sind unabhängig für $k \in \mathbb{N}$ $(k \neq 0)$, $1 \leq i, j \leq d$.

Grundlegende Eigenschaften von Zufallsvektoren

Ein d-dimensionaler Zufallsvektor $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d)^T$ wird durch die Verteilungsfunktion F spezifiziert

$$F(x) = F(x_1, x_2, \ldots, x_d) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_d \leq x_d) = P(X \leq x).$$

Die i. Randverteilung F_i von F ist die Verteilungsfunktion von X_i und ist folgendermaßen gegeben:

$$F_i(x_i) = P(X_i \leq x_i) = F(\infty, \ldots, \infty, x_i, \infty, \ldots, \infty)$$

Die Verteilungsfunktion F ist stetig wenn es eine nicht negative Funktion $f \geq 0$ gibt, sodass

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_d) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_d} f(u_1, u_2, \ldots, u_d) du_1 du_2 \ldots du_d$$

f ist in diesem Fall die Dichte von F.

Die Komponenten von X sind unabhängig dann und nur dann wenn

$$F(x) = \Pi_{i=1}^{d} F_i(x_i)$$

oder, wenn die Dichten f und f_i, $1 \leq i \leq d$, existieren, dann sind die Komp. von X d.u.n.d. unabhängig wenn

$$f(x) = \Pi_{i=1}^{d} f_i(x_i)$$

Ein Zufallsvektor wird durch seine charakteristische Funktion $\phi_X(t)$ eindeutig spezifiziert:

$$\phi_X(t) := E(\exp\{it^T X\}), t \in \mathbb{R}^d$$

Wenn $E(X_k^2) < \infty$ für alle k, dann ist die Kovarianzmatrix eines Zufallsvektors folgendermaßen gegeben:

$$Cov(X) = E((X - E(X))(X - E(X))^T)$$

Anmerkung:

Für einen n-dimensionalen Zufallsvektor X, eine konstante Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und einen konstanten Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ gelten folgende Gleichungen:

$$E(BX + b) = BE(X) + b \qquad Cov(BX + b) = BCov(X)B^T$$

Beispiel 1 *Für die multivariate Normalverteilung mit Mittelwert μ und Kovarianzmatrix Σ sind die Dichtefunktion f bzw. die charakteristische Funktion ϕ_X folgendermaßen gegeben ($|\Sigma| = |Det(\Sigma)|$):*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\Sigma|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right\}, x \in \mathbb{R}^d$$

$$\phi_X(t) = \exp\left\{it^T\mu - \frac{1}{2}t^T\Sigma t\right\}, t \in \mathbb{R}^d$$

Probleme bei Modellierung der Abhängigkeit zwischen Finanzgrössen mit Hilfe der (multivariaten) Normalverteilung

- Finanzgrößen haben i.a. heavier Tails als die Normalverteilung
- Die Zusammenhänge bei größeren Verlusten sind i.a. stärker als bei "normalen" Werten. Diese Art von Zusammenhängen kann mit der multivariaten Normalverteilung nicht modelliert werden.

(Veranschaulichung der Problematik durch einen Vergleich zwischen Streudiagrammen von echten Daten und Scatter-Plots von Daten, die aus einer Normalverteilung mit geschätztem Erwartungsvektor und geschätzter Kovarianzmatrix simuliert werden.)

Abhängigkeitsmaße
Seien X_1 und X_2 zwei Zufallsvariablen. Es gibt einige skalare Maße für die Abhängigkeit zwischen X_1 und X_2.

Lineare Korrelation
Annahme: $var(X_1), var(X_2) \in (0,\infty)$. Der Koeffizient der linearen Korrelation $\rho_L(X_1,X_2)$ ist folgendermaßen gegeben:

$$\rho_L(X_1,X_2) = \frac{cov(X_1,X_2)}{\sqrt{var(X_1)var(X_2)}}$$

$$X_1 \text{ und } X_2 \text{ sind unabhängig } \Rightarrow \rho_L(X_1,X_2) = 0$$

$$\rho_L(X_1,X_2) = 0 \text{ impliziert nicht, dass } X_1 \text{ und } X_2 \text{ unabhängig sind}$$

Beispiel 2 *Sei $X_1 \sim N(0,1)$ und $X_2 = X_1^2$. Es gilt $\rho_L(X_1,X_2) = 0$ aber X_1 und X_2 sind klarerweise abhängig.*

Weiters gilt:

$$|\rho_L(X_1,X_2)| = 1 \Leftrightarrow \exists \alpha,\beta \in \mathbb{R},\ \beta \neq 0,\ \text{sodass } X_2 \stackrel{d}{=} \alpha + \beta X_1$$
$$\text{und signum}(\beta) = \text{signum}(\rho_L(X_1,X_2))$$

Der lineare Korrelationskoeff. ist eine Invariante unter streng monoton steigende lineare Transformationen. D.h. für zwei Zufallsvariablen X_1 und X_2 und reellen Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, $\beta_1 > 0$ und $\beta_2 > 0$ gilt:

$$\rho_L(\alpha_1 + \beta_1 X_1, \alpha_2 + \beta_2 X_2) = \rho_L(X_1, X_2).$$

Der lineare Korrelationskoeffizient ist jedoch keine Invariante unter streng monoton steigende nicht-lineare Transformationen.

Beispiel 3 *Seien $X \sim Exp(\lambda)$, $X_2 = X_1$, und T_1, T_2 zwei streng monoton steigende Transformationen: $T_1(X_1) = X_1$ und $T_2(X_1)) = X_1^2$. Dann gilt:*

$$\rho_L(X_1, X_1) = 1 \textit{ und } \rho_L(T_1(X_1), T_2(X_1)) = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Rang Korrelation

Die Koeffizienten der Rang Korrelation (Spearmans Rho und Kendalls Tau) sind Maße für die Übereinstimmung von bivariaten Zufallsvektoren.

Seien (x_1, x_2) und $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ zwei Punkte in $\mathbb{R}^2$. Die zwei Punkte heißen *übereinstimmend* wenn $(x_1 - \tilde{x}_1)(x_2 - \tilde{x}_2) > 0$ und *nicht übereinstimmend* wenn $(x_1 - \tilde{x}_1)(x_2 - \tilde{x}_2) < 0$.

Seien $(X_1, X_2)^T$ und $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)^T$ zwei unabhängige Zufallsvektoren mit identischer bivariater Verteilung.

Die Kendall's Tau ρ_τ ist definiert als

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = P\left((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) > 0\right) - P\left((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) < 0\right)$$

Sei $(\hat{X}_1, \hat{X}_2)$ ein dritter von (X_1, X_2) und $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ unahängiger Zufallsvektor mit derselben Verteilung wie (X_1, X_2) und $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$.

Die Spearman's Rho ρ_S ist definiert als

$$\rho_S(X_1, X_2) = 3\left\{P\left((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \hat{X}_2) > 0\right) - P\left((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \hat{X}_2) < 0\right)\right\}$$

Einige Eigenschaften von ρ_τ und ρ_S:

- $\rho_\tau(X_1, X_2) \in [-1, 1]$ und $\rho_S(X_1, X_2) \in [-1, 1]$.

- Wenn X_1 und X_2 unabhängig, dann $\rho_\tau(X_1, X_2) = \rho_S(X_1, X_2) = 0$. Die Umkehrung gilt i.a. nicht.

- Sei $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine streng monoton steigende Funktion. Dann gilt:

$$\rho_\tau(T(X_1), T(X_2)) = \rho_\tau(X_1, X_2)$$

$$\rho_S(T(X_1), T(X_2)) = \rho_S(X_1, X_2)$$

Beweis: 1) und 2) sind trivial. Beweis von 3) erfolgt mit Hilfe von Copulas, später...