3. **Conditional Value at Risk** ($CVaR_\alpha(L)$) (oder *Expected Shortfall* (ES))

Ein Nachteil von VaR: Gibt keine Auskunft darüber, wie groß der Verlust sein könnte, falls $L \geq VaR_\alpha(L)$.

Definition 8 *Sei α ein vorgegebenes Konfidenzniveau und L eine kontinuierliche Verlustfunktion mit Verteilungsfunktion F_L. $CVaR_\alpha(L) := ES_\alpha(L) = E(L|L \geq VaR_\alpha(L))$.*

$CVaR_\alpha(L) = E(L|L \geq VaR_\alpha(L)) = \frac{E(LI_{[q_\alpha(L),\infty)}(L))}{P(L \geq q_\alpha(L))} = \frac{1}{1-\alpha}E(LI_{[q_\alpha(L),\infty)}) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{q_\alpha(L)}^{+\infty} l dF_L(l)$

I_A ist die Indikatorfunktion der Menge A: $I_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$

Sei F_L die diskrete Verteilungsfunktion einer Verlustverteilung L und α ein vorgegebenes Konfidenzniveau. Der *verallgemeinerte CVaR* wird im diskreten Fall folgendermaßen definiert:

$$GCVaR_\alpha(L) := \frac{1}{1-\alpha}\left[E(LI_{[q_\alpha(L),\infty)}) + q_\alpha\Big(1 - \alpha - P(L \geq q_\alpha(L))\Big)\right]$$

Lemma 1 *Sei α ein vorgegebenes Konfidenzniveau und L eine kontinuierliche Verlustfunktion mit Verteilungsfunktion F_L. Es gilt $CVaR_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_p(L)dp$.*

Beispiel 9 *(a) Sei* $L \sim Exp(\lambda)$*. Bestimmen Sie* $CVaR_\alpha(L)$*.*

(b) Die Verteilungsfunktion F_L *der Verlustfunktion* L *sei folgendermaßen gegeben:* $F_L(x) = 1-(1+\gamma x)^{-1/\gamma}$ *für* $x \geq 0$ *und* $\gamma \in (0,1)$*. Bestimmen Sie* $CVaR_\alpha(L)$*.*

Beispiel 10 *Sei* $L \sim N(0,1)$*. Seien* ϕ *und* Φ *die Verteilungsdichte bzw. Verteilungsfunktion von* L*. Es gilt* $CVaR_\alpha(L) = \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}$*.*

Sei $L' \sim N(\mu,\sigma^2)$*. Zeigen Sie, dass* $CVaR_\alpha(L') = \mu + \sigma\frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}$ *gilt.*

Übung 3 *Sei die Verteilungsfunktion von* L *die Student'schen t-Verteilung mit* $\nu > 1$ *Freiheitsgraden Die Dichtefunktion von* L *ist*

$$g_\nu(x) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\nu/2)}\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}$$

Zeigen Sie, dass $CVaR_\alpha(L) = \frac{g_\nu(t_\nu^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}\left(\frac{\nu+(t_\nu^{-1}(a))^2}{\nu-1}\right)$*, wobei* t_ν *die Verteilungsfunktion von* L *ist.*

Methoden zur Berechnung von VaR und CVaR

Portfoliowert: $V_m = f(t_m, Z_m)$

Z_m ist der Vektor von Risikofaktoren.

Verlustfunktion: $L_{m+1} = l_{[m]}(X_{m+1})$

X_{m+1} ist der Vektor der Veränderungen der Risikofaktoren:

$$X_{m+1} = Z_{m+1} - Z_m.$$

Beobachtungen (historische Daten): $Z_{m-n+1}, \ldots, Z_m$.

Wie können diese historischen Daten zur Berechnung von $VaR(L_{m+1})$, $CVaR(L_{m+1})$ verwendet werden?

Das empirische VaR bzw. CVaR

Sei $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eine Stichprobe der unabhängigen identischverteilten ZV $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mit Verteilungsfunktion F
(Notation: Die ZV $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sind i.i.d.)

Empirische Verteilungsfunktion: $F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I_{[x_k,+\infty)}(x)$

Empirisches Quantil: $q_\alpha(F_n) = \inf\{x \in \mathbb{R} \colon F_n(x) \geq \alpha\} = F_n^{\leftarrow}(\alpha)$

Annahme: $x_1 > x_2 > \ldots > x_n$. Dann gilt: $q_\alpha(F_n) = x_{[n(1-\alpha)]+1}$,
wobei $[y] = \sup\{n \in \mathbb{N} \colon n \leq y\}$ für jedes $y \in \mathbb{R}$.

$\widehat{q}_\alpha(F) := q_\alpha(F_n)$ ist der empirische Schätzer des Quantils $q_\alpha(F)$.

Lemma 2 *Sei F eine streng monoton steigende Funktion. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \widehat{q}_\alpha(F) = q_\alpha(F)$, $\forall \alpha \in (0,1)$, d.h. der Schätzer $\widehat{q}_\alpha(F)$ ist konsistent.*

Der empirische Schätzer des CVaR ist

$$\widehat{CVaR}_\alpha(F) = \frac{\sum_{k=1}^{[n(1-\alpha)]+1} x_k}{[(n(1-\alpha)]+1}$$

Ein nicht-parametrisches Bootstrapping Verfahren zu Ermittlung von Konfidenzintervallen der Schätzer

Seien die ZV $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d. mit Verteilungsfunktion F und sei $x_1, x_2, \ldots x_n$ eine Stichprobe daraus.

Gesucht: Ein Schätzer eines von F abhängigen Parameters θ, z.B. $\theta = q_\alpha(F)$, und das dazugehörige Konfidenzintervall.

Sei $\widehat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$ ein Schätzer von θ, zB. $\widehat{\theta}(x_1, \ldots, x_n) = x_{[(n-1)\alpha]+1,n}$, wobei $x_{1,n} > x_{2,n} > \ldots > x_{n,n}$ die sortierte Stichprobe ist.

Das gesuchte Konfidenzintervall ist ein (a, b), $a = a(x_1, \ldots, x_n)$ u. $b = b(x_1, \ldots, x_n)$, sodass $P(a < \theta < b) = p$, für ein vorgegebenes Konfidenzniveau p.

<u>Fall I</u>: F ist bekannt.

Durch Simulation von F werden N Stichproben (N groß) $\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}, \ldots, \tilde{x}_n^{(i)}$, $1 \le i \le N$, erzeugt.

Sei $\tilde{\theta}_i = \widehat{\theta}\big(\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)}, \ldots, \tilde{x}_n^{(i)}\big)$, $1 \le i \le N$.

Empirische Verleitungsfunktion von $\widehat{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$F_N^{\widehat{\theta}} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} I_{[\tilde{\theta}_i, \infty)} \to F^{\widehat{\theta}} \text{ für } N \to \infty.$$

Das gesuchte Konf.intervall: $\left(q_{\frac{1-p}{2}}(F_N^{\widehat{\theta}}), q_{\frac{1+p}{2}}(F_N^{\widehat{\theta}})\right)$

Fall II: F ist unbekannt $\Rightarrow$ Bootstrapping!

Empirische Verteilungsfunktion von X_i, $1 \le i \le n$, ist:
$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n I_{[x_i,\infty)}(x)$.

n groß $\Longrightarrow F_n \approx F$.

Wir können Stichproben aus F_n nehmen in dem wir (n) Elemente aus $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ mit Zurücklegung ziehen.

Angenommen es werden N solche Stichproben gezogen: $x_1^{*(i)}, x_2^{*(i)}, \ldots, x_n^{*(i)}$, $1 \le i \le N$.

Berechne $\theta_i^* = \widehat{\theta}\Big(x_1^{*(i)}, x_2^{*(i)}, \ldots, x_n^{*(i)}\Big)$.

Die empirische Verteilungsfunktion $F_N^{\theta^*}(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N I_{[\theta_i^*,\infty)}(x)$

approximiert die Verteilungsfunktion $F^{\widehat{\theta}}$ von $\widehat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ für $N \to \infty$.

Konfidenzintervall (a, b): $a = q_{(1-p)/2}(F_N^{\theta^*})$, $b = q_{(1+p)/2}(F_N^{\theta^*})$.

D.h. $a = \theta^*_{[N(1+p)/2]+1,N}$, $b = \theta^*_{[N(1-p)/2]+1,N}$,

wobei $\theta^*_{1,N} \ge \theta^*_{2,N} \ge \ldots \theta^*_{N,N}$ durch Sortierung von $\theta_1^*, \theta_2^*, \ldots, \theta_N^*$ entsteht.

Zusammenfassung des nicht-parametrischen Bootstrap Verfahrens zur Berechnung von Konfidenzintervallen

Gegeben: Stichprobe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der i.i.d. ZV. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mit Verteilungsfunktion F und ein Schätzer $\widehat{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eines unbekannten Parameters $\theta(F)$.

Gesucht: Ein Konfidenzintervall I_p für θ mit vorgegebenem Konfidenzniveau p .

- Bilde N neue Stichproben $x_1^{*(i)}, x_2^{*(i)}, \ldots, x_n^{*(i)}$, $1 \leq i \leq N$, durch Ziehung mit Zurücklegung aus $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

- Berechne $\theta_i^* = \widehat{\theta}\left(x_1^{*(i)}, x_2^{*(i)}, \ldots, x_n^{*(i)}\right)$.

- $I_p = \left(\theta^*_{[N(1+p)/2]+1,N}, \theta^*_{[N(1-p)/2]+1,N}\right)$, wobei $\theta^*_{1,N} \geq \theta^*_{2,N} \geq \ldots \theta^*_{N,N}$ durch Sortierung von $\theta_1^*, \theta_2^*, \ldots, \theta_N^*$ entsteht

Eine approximative Lösung ohne Bootstrap

Gegeben: Eine Stichprobe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von ZV X_i, $1 \leq i \leq n$, i.i.d. mit unbekannter kontinuierlicher Verteilungsfunktion F.

Gesucht: Ein Konfidenzintervall (a, b) für $q_\alpha(F)$, $a = a(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $b = b(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, sodass

$$P(a < q_\alpha(F) < b) = p \text{ und } P(a \geq q_\alpha(F)) = P(b \leq q_\alpha(F)) = (1-p)/2$$

Wir suchen $i > j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, und das kleinste $p' > p$, sodass

$$P\Big(x_{i,n} < q_\alpha(F) < x_{j,n}\Big) = p' \qquad (*) \qquad \text{und}$$

$$P\Big(x_{i,n} \geq q_\alpha(F)\Big) \leq (1-p)/2 \text{ und } P\Big(x_{j,n} \leq q_\alpha(F)\Big) \leq (1-p)/2 (**),$$

wobei $x_{1,n} \geq x_{2,n} \geq \ldots \geq x_{n,n}$ durch Sortierung von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entsteht.

Sei $Y_\alpha = \#\{x_k \colon x_k > q_\alpha(F)\}$

Es gilt: $P(x_{j,n} \leq q_\alpha(F)) = P(x_{j,n} < q_\alpha(F)) = P(Y_\alpha \leq j-1)$
$P(x_{i,n} \geq q_\alpha(F)) = P(x_{i,n} > q_\alpha(F)) = 1 - P(Y_\alpha \leq i-1)$

$Y_\alpha \sim B(n, 1-\alpha)$. Berechne $P(x_{j,n} \leq q_\alpha(F))$ und $P(x_{i,n} \geq q_\alpha(F))$ für unterschiedliche i und j solange bis $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i > j$, gefunden werden, die $(*)$ und $(**)$ erfüllen.