Das KMV Modell (siehe auch `www.moodyskmv.com`)

Die Status Variablen $S = (S_1, S_2, \ldots, S_n)$ können nur zwei Werte 0 und 1 annehmen, d.h. $m = 1$.

Die latenten Variablen $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)^T$ hängen mit dem Wert der Aktien der jeweiligen Firmen folgendermaßen zusammen.

Das Modell von Merton

Die Bilanz jeder Firma besteht aus 2 Positionen:
Aktiva (Aktien) und Passiva (Liabilities and Equities).

Die Passiva bestehen aus Schulden ("Liabilities") und Stammkapital ("Equity").

$V_{A,i}(T)$: Wert der Aktien der Firma i zum Zeitpunkt T

$K_i(T) =: K_i$: Wert der Schulden der Firma i zum Zeitpunkt T

$V_{E,i}(T)$: Wert des Stammkapitals der Firma i zum Zeitpunkt T

Annahme: Zukünftiger Wert der Aktien wird als geometrische Brown'sche Bewegung modelliert

$$V_{A,i}(T) = V_{A,i}(t)\,\mathrm{exp}\left\{\left(\mu_{A,i} - \frac{\sigma_{A,i}^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_{A,i}\left(W_i(T) - W_i(t)\right)\right\},$$

$\mu_{A,i}$ ist die Drift, $\sigma_{A,i}$ ist die Volatilität und $(W_i(t)\colon 0 \leq t \leq T)$ ist eine Standard Brown'sche Bewegung (Wiener Prozess).

D.h. $(W_i(T) - W_i(t)) \sim N(0, T-t)$.

Daraus folgt $\ln V_{A,i}(T) \sim N(\mu, \sigma^2)$
mit $\mu = \ln V_{A,i}(t) + \left(\mu_{A,i} - \frac{\sigma_{A,i}^2}{2}\right)(T-t)$ und $\sigma^2 = \sigma_{A,i}^2(T-t)$.

Weiters gilt: $X_i = I_{(-\infty,K_i)}(V_{A,i}(T))$

Setze $Y_i = \frac{W_i(T)-W_i(t)}{\sqrt{T-t}} \sim N(0,1)$.

Dann gilt: $X_i = I_{(-\infty,K_i)}(V_{A,i}(T)) = I_{(-\infty,-DD_i)}(Y_i)$ wobei

$$DD_i = \frac{\ln V_{A,i}(t) - \ln K_i + (\mu_{A,i} - \frac{\sigma_{A,i}^2}{2})(T-t)}{\sigma_{A,i}\sqrt{T-t}} \tag{1}$$

DD_i heißt *distance-to-default*.

Berechnung des "distance to default"

Schwierigkeit: $V_{A,i}(t)$ kann nicht beobachtet werden
Aber $V_{E,i}(t)$ kann beobachtet werden.

KMVs Auffassung: Die Geldgeber besitzen die Firma solange die Schulden seitens der Stammkapitalbesitzer (Equity holders) nicht vollständig bezahlt werden

$$\Downarrow$$

$V_{E,i}(T)$ ist daher der Preis einer Call Option über die Aktien der Firma mit Strike Price den Buchwert der Schulden zum Zeitpunkt T:

$$V_{E,i}(T) = \max\{V_{A,i}(T) - K_i, 0\}$$

Aus der Black-Scholes Formula (Optionspreistheorie):

$$V_{E,i}(t) = C(V_{A,i}(t), r, \sigma_{A,i}) = V_{A,i}(t)\phi(e_1) - K_i e^{-r(T-t)}\phi(e_2) \qquad (2)$$

wobei

$$e_1 = \frac{\ln(V_{A,i}(t) - \ln K_i + (r + \sigma_{A,i}^2/2)(T-t)}{\sigma_{A,i}(T-t)} \text{ und } e_2 = e_1 - \sigma_{A,i}(T-t)$$

ϕ ist die Verteilungsfunktion der Standard Normalverteilung und r ist der risikofreie Zinssatz.

Im KMV Modell gilt weiters:

$$\sigma_{E,i} = g(V_{A,i}(t), \sigma_{A,i}, r) \tag{3}$$

Beobachtung/Schätzung von $V_{E,i}(t)$ bzw. $\sigma_{E,i}$ aus historischen Beobachtungen

$$\Downarrow$$

Einsetzen in (2) und (3) und Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} V_{E,i}(t) &= C(V_{A,i}(t), r, \sigma_{A,i}) \\ \sigma_{E,i} &= g(V_{A,i}(t), \sigma_{A,i}, r) \end{aligned} \tag{4}$$

um $V_{A,i}(t)$ und $\sigma_{A,i}$ zu ermitteln

$$\Downarrow$$

Verwendung dieser Werte zur Berechnung von DD_i aus (1).

Die erwartete Häufigkeit der Zahlungsunfähigkeit (expected default frequency, EDF)

KMV Modell evaluiert nicht direkt die Default Wahrscheinlichkeit $p_i = P(Y_i < -DD_i)$

Ermittlung von Firmen die historisch gesehen je einen "distance-to-default" von ca. DD_i hatten.

Ermittlung der Häufigkeit von Zahlungsunfähigkeit für diese Firmen als Schätzer für die Default-Wahrscheinlichkeit p_i.

Dieser Schätzer wird *expected default frequency, (EDF)* genannt.

Zusammenfassung des univariaten KMV Modells zur Berechnung der Default Wahrscheinlichkeit für eine Firma:

- Ermittlung des Aktienwertes $V_{A,i}$ und dessen Volatilität $\sigma_{A,i}$ mit Hilfe der Beobachtungen über Marktwert und Volatilität der Equities ($V_{E,i}$ bzw. $\sigma_{E,i}$) sowie der Schulden K_i als Lösung des Gleichungssystems (4).

- Berechnung der "distance-to-default" DD_i aus (1)

- Berechnung der Default-Wahrscheinlichkeiten p_i mit Hilfe einer empirischen Verteilung, die den Zusammenhang zwischen Default-Wahrscheinlichkeit und "distance-to-default" modelliert (zB. mit Hilfe von EDF)

Das multivariate KMV Modell: Berechnung von multivariaten Default Wahrscheinlichkeiten

Seien $(Wj(t)\colon 0 \leq t \leq T,)$ unabhängige Standard Brown'sche Bewegungen, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Grundlegendes Modell:

$$V_{A,i}(T) = V_{A,i}(t) \exp\left\{\left(\mu_{A,i} - \frac{\sigma_{A,i}^2}{2}\right)(T-t) + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{A,i,j}\Big(W_j(T) - W_j(t)\Big)\right\},$$

$\mu_{A,i}$ ist die Drift und $\sigma_{A,i}^2 = \sum_{j=1}^{m} \sigma_{A,i,j}^2$ ist die Volatilität.

$\sigma_{A,i,j}$ quantifiziert den Einfluss der Brown'schen Bewegung j auf die Entwicklung des Aktienwertes der Firma i.

Sei $Y_i = \frac{\sum_{j=1}^{m} \sigma_{A,i,j}(W_j(T)-W_j(t))}{\sigma_{A,i}\sqrt{T-t}}$.

$Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \sim N(0, \Sigma)$ wobei $\Sigma_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{m} \sigma_{A,i,k}\sigma_{A,j,k}}{\sigma_{A,i}\sigma_{A,j}}$

Dann gilt $V_{A,i}(T) < K_i \Longleftrightarrow Y_i < -DD_i$ wobei

$$DD_i = \frac{\ln V_{A,i}(t) - \ln K_i + \left(\frac{-\sigma_{A,i}^2}{2} + \mu_{A,i}\right)(T-t)}{\sigma_{A,i}\sqrt{T-t}}$$

Wahrscheinlichkeit, dass die ersten k Firmen zahlungsunfähig werden:

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1, X_2 = 1, \ldots, X_k = 1) &= P(Y_1 < -DD_1, \ldots, Y_k < -DD_k) \\ &= C_\Sigma^{Ga}(\phi(-DD_1), \ldots, \phi(-DD_k), 1, \ldots, 1) \end{aligned}$$

C_Σ^{Ga} ist die Copula einer multivariaten Normalverteilung mit Kovarianzmatrix Σ.

Häufigkeit der multivariaten Zahlungsunfähigkeit (joint default frequency):

$$JDF_{1,2,\ldots,k} = C_\Sigma^{Ga}(EDF_1, EDF_2, \ldots, EDF_k, 1, \ldots, 1)$$

wobei EDF_i die Häufigkeit der Zahlungsunfähigkeit für die Firma i, $i = 1, 2, \ldots, k$, ist.

Schätzung der Kovarianzen/Korrelationen $\sigma_{A,i,j}$

Schwierigkeiten:

- n ist typischerweise sehr groß
- wenige historische Daten vorhanden,
- wenn n groß, dann bilden die paarweise geschätzten Korrelationskoeffizienten i.A. keine positiv definite Korrelationsmatrix.

Mögliche Lösung:

Faktormodell für die latenten Variablen in dem der Aktienwert durch eine Reihe von gemeinsamen Faktoren (makro-ökonomische globale, regionale, Sektor-, Länder- und Branchen-spezifische Faktoren) und einem Firmenspezifischen Faktor bestimmt wird:

$$Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)^T = AZ + BU \text{ wobei}$$

$Z = (Z_1, \ldots, Z_k)^T \sim N_k(0, \Lambda)$ sind k gemeinsame Faktoren

$U = (U_1, \ldots, U_n)^T \sim N_d(0, I)$ sind die Firmenspezifischen Faktoren

Z und U sind unabhängig und

die Konstanten Matrizen $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $B = diag(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind Modellparameter.

Es gilt dann $cov(Y) = A\Lambda A^T + D$ wobei $D = diag(b_1^2, \ldots, b_n^2) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Credit Metrics

Wurde bei J.P.Morgan entwickelt.

Wird in erster Linie für die Evaluierung von Bond Portfolios verwendet. (Siehe Crouhy et al. (2000), J.P.Morgan Inc. (1997))

Basiert auf ein Bonität-Einstufungssystem
(zB. von *Moody* oder von *Standard and Poor's*).

Berücksichtigt die Veränderungen im PF-Wert aufgrund von Veränderungen in den Bonität-Einstufungen.

Sei P ein Portfolio von n Krediten mit einer fixen Laufzeit (zB. 1 Jahr). Sei S_i der Zustand-Indikator von Kreditnehmer i.

Die möglichen Zustände werden mit $0, 1, \ldots, m$ bezeichnet, wobei $S_i = 0$ der Zahlungsunfähigkeit entspricht.

Beispiel 1 *Einstufungssystem von Standard and Poor's*

$m = 7$; $S_i = 0$ heißt Zahlungsunfähigkeit; $S_i = 1$ oder CCC; $S_i = 2$ oder B; $S_i = 3$ oder BB; $S_i = 4$ oder BBB; $S_i = 5$ oder A; $S_i = 6$ oder AA; $S_i = 7$ oder AAA.

Für jeden Kreditnehmer wird die Dynamik der Bonität-Einstufungen mit Hilfe einer Markov Kette mit Zustandsmenge $\{0, 1, \ldots, m\}$ und Übergangsmatrix P modelliert.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten werden mit Hilfe von historischen Daten geschätzt, zB.:

Ursprüngliche	Einstufung am Ende des Jahres							Zahlungs-
Einstufung	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	unfähigkeit
AAA	90.81	8.33	0.68	0.06	0.12	0	0	0
AA	0.70	90.65	7.79	0.64	0.06	0.14	0.02	0
A	0.09	2.27	91.05	5.52	0.74	0.26	0.01	0.06
BBB	0.02	0.33	5.95	86.93	5.30	1.17	0.12	0.18
BB	0.03	0.14	0.67	7.73	80.53	8.84	1.00	1.06
B	0	0.11	0.24	0.43	6.48	83.46	4.07	5.20
CCC	0.22	0	0.22	1.30	2.38	11.24	64.86	19.79

Recovery Rates

Im Fall einer Zahlungsunfähigkeit hängt die recovery rate von der Einstufung des Kreditnehmers ab. Der Durchschnittswert und die Standardabweichung der recovery rate werden aufgrund von historischen Daten innerhalb jeder Einstufungsklasse geschätzt.

Evaluierung der Bonds im Falle einer Neu-Einstufung

Beispiel 2 *Betrachten wir ein BBB Bond mit Laufzeit* 5 *Jahre.*

Er zahlt jedes Jahr ein Kupon von 6%.

Die forward Zinsstrukturkurven (forward yield curves) für jede Einstufungsklasse sind wie folgt gegeben (in %):

Einstufung	1. Jahr	2. Jahr	3. Jahr	4. Jahr
AAA	3.60	4.17	4.73	5.12
AA	3.65	4.22	4.78	5.17
A	3.73	4.32	4.93	5.32
BBB	4.10	4.67	5.25	5.63
BB	6.05	7.02	8.03	8.52
CCC	15.05	15.02	14.03	13.52

Für ein Nennwert von 100 *zahlt der Bond* 6 *Währungseinheiten am Ende des 1., 2., 3. und 4. Jahres. Am Ende des 5. Jahres zahlt der Bond* 106 *Währungseinheiten.*

Annahme: Am Ende des ersten Jahres wird der Bond neu als A Bond eingestuft. Wert des Bonds am Ende des ersten Jahres:
$V = 6 + \frac{6}{1+3{,}73\%} + \frac{6}{(1+4{,}32\%)^2} + \frac{6}{(1+4{,}93\%)^3} + \frac{106}{(1+5{,}32\%)^4} = 108.64$

Analog wird der Wert des Bonds am Ende des 1. Jahres ermittelt, falls er zu diesem Zeitpunkt zu anderen Klassen eingestuft wird.

Es wird eine recovery rate von 51.13% im Falle von Zahlungsunfähigekt angenommen.

Einstufung am Ende des 1. Jahres	Wert
AAA	109.35
AA	109.17
A	108.64
BBB	107.53
BB	102.01
B	98.09
CCC	83.63
Zahlungsunfähigkeit	51.13

Wert und Risiko eines Bond-Portfolios in `Credit Metrics`

Die Abhängigkeit der Neueinstufungen unterschiedlicher Bonds und die Wahrscheinlichkeiten von Neueinstufungen von Gruppen von Bonds werden mit Hilfe der dazugehörigen Rendite berechnet.

Die Rendite von Bond i wird als Normalverteilung Y_i modelliert.

Seien d_{Def}, d_{CCC}, ..., $d_{AAA} = +\infty$ Schwellwerte, sodass für ein Kreditnehmer die Wahrscheinlichkeit des Übergangs in einer neuen Stufe S_i am Ende einer vordefinierten Periode folgendermaßen gegeben sind: $P(S_i = 0) = \phi(d_{Def})$, $P(S_i = CCC) = \phi(d_{CCC}) - \phi(d_{Def})$, ..., $P(S_i = AAA) = 1 - \phi(AA)$.

Die Rendite mehrerer Bonds werden mit Hilfe der multivariaten Normalverteilung modelliert.

Die Korrelationsmatrix dieser Verteilung wird in `Credit Metrics` mit Hilfe von Faktormodellen berechnet.

Dann können Gesamtwahrscheinlichkeiten wie

$$P(S_1 = 0, \ldots, S_n = 3) = P(Y_1 \leq d_{Def}, \ldots, d_B < Y_n \leq d_{BB})$$

berechnet werden. Als Modell für die Abhängigkeitsstruktur des Vektors $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ wird die Gauss'sche Copula(!) verwendet.

Die Risikomasse eines Kreditportfolios werden mit Hilfe von Simulationen berechnet. Es werden viele Szenarien generiert, aufgrund derer der empirische VaR ermittelt wird.

Die Bernoulli gemischte Verteilung

Der 0-1 Zufallsvektor $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ hat eine Bernoulli gemischte Verteilung (BMV) wenn es einen Zufallsvektor $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_m)^T$, $m < n$, und Funktionen $f_i \colon \mathbb{R}^m \to [0,1]$, $i = 1, 2, \dots, n$, gibt, sodass X bedingt durch Z ein Vektor von unabhängingen Bernoulli verteilten Zufallsvariablen ist und

$$P(X_i = 1|Z) = f_i(Z) \ , \ P(X_i = 0) = 1 - f_i(Z)$$

Für $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \{0, 1\}^n$ gilt

$$P(X = x|Z) = \prod_{i=1}^{n} f_i(Z)^{x_i} (1 - f_i(Z))^{1-x_i}$$

Die unbedingte Verteilung:

$$P(X = x) = E(P(X = x|Z)) = E\Big(\prod_{i=1}^{n} f_i(Z)^{x_i} (1 - f_i(Z))^{1-x_i}\Big)$$

Annahme: alle Funktionen f_i sind identisch, $f_i = f$. Für die Anzahl der Zahlungsunfähigkeitsfällen $N = \sum_{i=1}^{n} X_i$ gilt $N|Z \sim$ Binomial$(n, f(Z))$.

Die Poisson gemischte Verteilung

Der diskrete Zufallsvektor $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ hat eine Poisson gemischte Verteilung (PMV) wenn es einen Zufallsvektor $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_m)^T$, $m < n$, und Funktionen $\lambda_i \colon \mathbb{R}^m \to (0, \infty)$, $i = 1, 2, \dots, n$, gibt, sodass X bedingt durch Z ein Vektor von unabhängingen Poisson verteilten Zufallsvariablen ist und

$$P(X_i = x_i | Z) = \frac{\lambda_i(Z)^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda_i(Z)} \text{ für } x_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Für $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ gilt

$$P(X = x | Z) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i(Z)^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda_i(Z)}$$

Die unbedingte Verteilung:

$$P(X = x) = E(P(X = x | Z)) = E\Big(\prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i(Z)^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda_i(Z)} \Big)$$

Annahme: $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)^T$ ist PMV mit Faktoren Z.

Sei $X_i = I_{[1,\infty)}(\tilde{X}_i)$. $X = (X_1, \dots, X_n)$ ist BMV mit $f_i(Z) = 1 - e^{-\lambda_i(Z)}$

Für $\lambda_i(Z)$ klein gilt $\tilde{N} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}_i \approx \sum_{i=1}^{n} X_i$.
$\tilde{N} | Z \sim Poisson(\bar{\lambda}(Z))$ wobei $\bar{\lambda} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(Z)$.

Beispiele von Bernoulli gemischten Verteilungen

Annahmen:

- Z ist univariat (d.h. es gibt einen Risikofaktor)
- $f_i = f$ für alle i

Es gilt: $P(X_i = 1|Z) = f(Z)$, $\forall i$; $N|Z = \sum_{i=1}^n X_i \sim Binomial(n, f(Z))$.

Die unbedingte Wahrscheinlichkeit, dass die ersten k Kreditnehmer zahlungsunfähig werden

$$P(X_1 = 1, \ldots, X_k = 1, X_{k+1} = 0, \ldots, X_n = 0) =$$

$$E(P(X_1 = 1, \ldots, X_k = 1, X_{k+1} = 0, \ldots, X_n = 0|Z)) = E(f(Z)^k(1-f(Z))^{n-k})$$

Sei G die Verteilungsfunktion von Z. Dann gilt:

$$P(X_1 = 1, \ldots, X_k = 1, X_{k+1} = 0, \ldots, X_n = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)^k(1-f(z))^{n-k} d(G(z))$$

Die Verteilung der Anzahl N der Zahlungsunfähigen Kreditnehmer :

$$P(N = k) = \binom{n}{k} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)^k(1 - f(z))^{n-k} d(G(z))$$

Die Beta-gemischte Verteilung

Es gilt $Z \sim Beta(a,b)$ und $f(z) = z$.

Die Dichte g von Z: $g(z) = \frac{1}{\beta(a,b)} z^{a-1}(1-z)^{b-1}$, für $a, b > 0$, $z \in (0,1)$ wobei $\beta(a,b) = \int_0^1 z^{a-1}(1-z)^{b-1} dz$ die Euler'sche Betafunktion ist.

Verteilung der Anzahl der zahlungsunfähigen Kreditnehmer:

$$P(N = k) = \binom{n}{k} \int_0^1 z^k (1-z)^{n-k} g(z) dz =$$

$$\binom{n}{k} \frac{1}{\beta(a,b)} \int_0^1 z^{a+k-1}(1-z)^{n-k+b-1} dz =$$

$$\binom{n}{k} \frac{\beta(a+k, b+n-k)}{\beta(a,b)} \qquad \textit{beta-binomial Verteilung}$$

Probit-normal Mischung

$Z \sim N(0,1)$, $f(z) = \phi(\mu + \sigma z)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ und ϕ ist die Standard Normalverteilungsfunktion.

Logit-normal Mischung

$Z \sim N(0,1)$, $f(z) = (1 + \exp\{\mu + \sigma z\})^{-1}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

CreditRisk$^+$ - Ein Poisson gemischtes Modell

(Entwickelt von CSFB in 1997, siehe Crouhy et al. (2000) und `http://www.credit_suisse.com/investment_banking/research/en/credit_risk.jsp`

m unabhängige Risikofaktoren $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$, $Z_j \sim \Gamma(\alpha_j, \beta_j)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, sodass $E(Z_j) = 1$.

$\lambda_i(Z) = \bar{\lambda}_i \sum_{j=1}^m a_{ij} Z_j$, $\sum_{j=1}^m a_{ij} = 1$ für $i = 1, 2, \ldots, n$.

$\bar{\lambda}_i > 0$, α_j, β_j sind Konstante. α_j, β_j werden meistens so gewählt, dass $E(\lambda_i(Z)) = \bar{\lambda}_i > 0)$ gilt.

Die Dichte von Z_j ist folgendermassen gegeben: $f_j(z) = \frac{z^{\alpha_j - 1} \exp\{-z/\beta_j\}}{\beta_j^{\alpha_j} \Gamma(\alpha_j)}$

Verlust bei Kredit i durch Zahlungsunfähigkeit von Kreditnehmer i: $LGD_i = (1 - \lambda_i) L_i$, $1 \leq i \leq n$, wobei λ_i die erwartete deterministische 'Recovery rate' ist und L_i die Höhe von Kredit i ist.

Das Ziel ist, die Verlustverteilung durch eine diskrete Verteilung zu approximieren und für diese die Erzeugende Funktion zu ermitteln.

Sei Y eine diskrete ZV mit Wertebereich $\{y_1, \ldots, y_m\}$ oder eine kontinuierliche ZV mit Dichtefunktion $f(y)$ in $\mathbb{R}$

Definition 1 *Die erzeugende Funktion von Y ist definiert als* $g_Y(t) := E(t^Y) = \sum_{i=1}^m t^{y_i} P(Y = y_i)$ *bzw.* $g_Y(t) := \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} t^y f(y) dy$ *für* $t \in [0, 1]$.

Einige Eigenschaften der erzeugenden Funktionen:

(i) Wenn $Y \sim Bernoulli(p)$ dann $g_Y(t) = 1 + p(t - 1)$.

(ii) Wenn $Y \sim Poisson(\lambda)$, dann $g_Y(t) = \exp\{\lambda(t - 1)\}$.

(iii) Für unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ gilt

$$g_{X_1 + \ldots + X_n}(t) = \prod_{i=1}^n g_{X_i}(t).$$

(iv) Sei Y eine Zufallsvariable mit Dichtefunktion f und sei $g_{X|Y=y}(t)$ die erzeugenden Funktion von $X|Y = y$. Dann gilt

$$g_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{X|Y=y}(t) f(y) dy.$$

(v) Sei $g_X(t)$ die erzeugende Funktion von X. Dann gilt

$$P(X = k) = \frac{1}{k!} g_X^{(k)}(0) \text{ wobei } g_X^{(k)}(t) = \frac{d^k g_X)}{dt^k}.$$

Die Erzeugende Funktion der Verlustverteilung

Jeder Verlust wird als ganzzahliges Vielfaches einer vordefinierten Verlusteinheit L_0 (zB. $L_o = 10^6$ Euro):

$$LGD_i = (1-\lambda_i)L_i \approx \left[\frac{(1-\lambda_i)L_i}{L_0}\right] L_0 = v_i L_0 \text{ mit } v_i := \left[\tfrac{(1-\lambda_i)L_i}{L_0}\right]$$

wobei $[x] = \arg\min_t\{|t-x|\colon t \in \mathbb{Z}, t-x \in (-1/2, 1/2]\}$.

Die Verlustfunktion: $L = \sum_{i=1}^n X_i v_i L_0$.

(a) Ermittlung der erzeugenden Funktion für $N = X_1 + \ldots + X_n$

$X_i|Z \sim Poisson(\lambda_i(Z))$, $\forall i \Longrightarrow g_{X_i|Z}(t) = \exp\{\lambda_i(Z)(t-1)\}$, $\forall i \Longrightarrow$

$$g_{N|Z}(t) = \prod_{i=1}^n g_{X_i|Z}(t) = \prod_{i=1}^n \exp\{\lambda_i(Z)(t-1)\} = \exp\{\mu(t-1)\}\,, \qquad (5)$$

mit $\mu := \sum_{i=1}^n \lambda_i(Z) = \sum_{i=1}^n (\bar{\lambda}_i \sum_{j=1}^m a_{ij} Z_j)$.

$$\begin{aligned} g_N(t) &= \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty g_{N|Z=(z_1,z_2,\ldots,z_m)} f_1(z_1)\ldots f_m(z_m) dz_1 \ldots dz_m = \\ & \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \exp\left\{\sum_{i=1}^n \left(\bar{\lambda}_i \sum_{j=1}^m a_{ij} z_j\right)(t-1)\right\} f_1(z_1)\ldots f_m(z_m) dz_1 \ldots dz_m = \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \mathsf{exp}\left\{(t-1)\sum_{j=1}^m \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i a_{ij}}_{\mu_j}\Big) z_j)\right\} f_1(z_1)\ldots f_m(z_m) dz_1 \ldots dz_m =$$

$$\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \mathsf{exp}\{(t-1)\mu_1 z_1\} f_1(z_1) dz_1 \ldots \mathsf{exp}\{(t-1)\mu_m z_m\} f_m(z_m) dz_m =$$

$$\prod_{j=1}^m \int_0^\infty \mathsf{exp}\{z_j \mu_j (t-1)\} \frac{1}{\beta_j^{\alpha_j}\Gamma(\alpha_j)} z_j^{\alpha_j - 1} \mathsf{exp}\{-z_j/\beta_j\} dz_j \qquad (6)$$

Die Berechnung der einzelnen Integrale in (6) ergibt:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha_j)\beta_j^{\alpha_j}} \mathsf{exp}\{z_j \mu_j (t-1)\} z_j^{\alpha_j - 1} \mathsf{exp}\{-z_j/\beta_j\} dz_j = \left(\frac{1-\delta_j}{1-\delta_j t}\right)^{\alpha_j}$$

$$\delta_j = \beta_j \mu_j / (1 + \beta_j \mu_j). \qquad (7)$$

Es gilt also $g_N(t) = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{1-\delta_j}{1-\delta_j t} \right)^{\alpha_j}$.

(b) Ermittlung der erzeugenden Funktion für $L = \sum_{i=1}^{n} X_i v_i L_0$.

Bedingter Verlust aufgrund Zahlungsunfähigkeit von Kreditnehmer i:

$L_i|Z = v_i(X_i|Z)$; $L_i|Z$ unabhängig für $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$g_{L_i|Z}(t) = E(t^{L_i}|Z) = E(t^{v_i X_i}|Z) = g_{X_i|Z}(t^{v_i}).$$

Die erzeugende Funktion des gesamten Verlusts bedingt durch Z:

$$g_{L|Z}(t) = g_{L_1+L_2+\ldots+L_n|Z}(t) = \prod_{i=1}^{n} g_{L_i|Z}(t) = \prod_{i=1}^{n} g_{X_i|Z}(t^{v_i}) =$$

$$\exp\left\{ \sum_{j=1}^{m} Z_j \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i a_{ij} (t^{v_i} - 1) \right) \right\}.$$