

Definition 15 Sei $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$ mit Verteilungsfunktion F und stetigen Randverteilungen F_1, F_2, \dots, F_d . Dann wird die eindeutige Copula C von F , $C(u) = F(F_1^{\leftarrow}(u_1), \dots, F_d^{\leftarrow}(u_d))$, elliptische Copula genannt.

Beispiel 15 Gauss'sche Copulas sind elliptische Copulas
Sei C_R^{Ga} die Copula einer d -dimensionalen standard Normalverteilung mit Korrelationsmatrix R :

$$C_R^{Ga}(u) = \phi_R^d(\phi^{-1}(u_1), \dots, \phi^{-1}(u_d)),$$

wobei ϕ_R^d die Gesamtverteilungsfunktion einer d -dimensionalen Normalverteilung mit Erwartungsvektor 0 und Korrelationsmatrix R und ϕ^{-1} die Inverse der Verteilungsfunktion einer univariaten standard Normalverteilung ist. Da die Normalverteilung eine elliptische Verteilung ist, ist die Gauss'sche Copula C_R^{Ga} eine elliptische Copula.

Im bivariaten Fall gilt:

$$C_R^{Ga}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \exp \left\{ \frac{-(x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2)}{2(1-\rho^2)} \right\} dx_1 dx_2,$$

wobei $\rho \in (-1, 1)$.

t-Copula: ein weiteres Beispiel elliptischer Copulas

Definition 16 Sei $X \stackrel{d}{=} \mu + \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{S}}AZ \sim t_d(\alpha, \mu, \Sigma)$, wobei $\mu \in \mathbb{R}^d$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha > 1$, $S \sim \chi_\alpha^2$, $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$ mit $AA^t = \Sigma$ und $Z \sim N_k(0, I_k)$, und S und Z unabhängig sind. Es heißt, X hat eine d -dimensionale t -Verteilung mit Mittelwert μ (für $\alpha > 1$) und Kovarianzmatrix $\text{Cov}(X) = \frac{\alpha}{\alpha-2}\Sigma$ (für $\alpha > 2$). $\text{Cov}(X)$ existiert nicht für $\alpha \leq 2$.

Definition 17 Die Copula $C_{\alpha,R}^t$ von X heißt t -Copula. Für die t -Copula gilt:

$$C_{\alpha,R}^t(u) = t_{\alpha,R}^d(t_\alpha^{-1}(u_1), \dots, t_\alpha^{-1}(u_d)).$$

$R_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}}$, $i, j = 1, 2, \dots, d$, ist die Korrelationsmatrix von Z ,

$t_{\alpha,R}^d$ ist die Verteilungsfunktion von $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{S}}RZ$, wobei $S \sim \chi_\alpha^2$ und $Z \sim N_k(0, I_k)$ unabhängig sind, und t_α sind die Randverteilungen von $t_{\alpha,R}^d$.

Bivariater Fall ($d = 2$):

$$C_{\alpha,R}^t(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{t_\alpha^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t_\alpha^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \left\{ 1 + \frac{x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2}{\alpha(1-\rho^2)} \right\}^{-(\alpha+2)/2} dx_1 dx_2,$$

für $\rho \in (-1, 1)$. R_{12} ist der lineare Korrelationskoeffizient der dazugehörigen bivariaten t_α -Verteilung für $\alpha > 2$.

Copulas: Weitere Eigenschaften

Definition 18 (Radiale Symmetrie oder Kugel-Symmetrie)

Ein Zufallsvektor X (oder eine Verteilungsfunktion) heißt radial symmetrisch (oder kugel-symmetrisch) um den Punkt a wenn $X - a \stackrel{d}{=} a - X$.

Beispiel: Ein elliptisch-verteilter Zufallsvektor $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi) \in \mathbb{R}^d$ ist radial-symmetrisch um μ .

Definition 19 (Radiale Symmetrie von Copulas)

Eine Copula C heißt radial-symmetrisch wenn

$$(U_1 - 0.5, \dots, U_d - 0.5) \stackrel{d}{=} (0.5 - U_1, \dots, 0.5 - U_d) \iff U \stackrel{d}{=} \mathbf{1} - U,$$

wobei (U_1, U_2, \dots, U_d) ein Zufallsvektor mit Verteilungsfunktion C ist.

Für eine radial symmetrische Copula gilt $C = \hat{C}$.

Beispiel: Elliptische Copulas sind radial symmetrisch.

Die Gumbel und Clayton Copulas sind es nicht. Überzeugen Sie sich!

Die Dichtefunktion einer Copula

Copulas haben nicht immer eine Dichtefunktion. Z.B. die Co-Monotonie Copula M bzw. die Anti-Monotonie Copula W haben keine Dichtefunktion.

Wenn die Dichtefunktion c einer Copula C existiert dann gilt

$$c(u_1, u_2, \dots, u_d) = \frac{\partial C(u_1, u_2, \dots, u_d)}{\partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_d}$$

Sei C die Copula einer Gesamtverteilung F mit stetigen Randverteilungsfunktionen F_1, \dots, F_d . Dann kann die Gleichung

$$C(u_1, \dots, u_d) = F(F_1^{\leftarrow}(u_1), \dots, F_d^{\leftarrow}(u_d))$$

differenziert werden um die Dichte c von C zu erhalten:

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{f(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d))}{f_1(F_1^{-1}(u_1)) \dots f_d(F_d^{-1}(u_d))}$$

f ist die Gesamtdichtefunktion, f_i sind die Dichtefunktionen der Randverteilungen, $1 \leq i \leq d$, und F_i^{-1} ist die inverse Funktion von F_i .

Definition 20 Ein Zufallsvektor X heißt vertauschbar (“exchangeable”) wenn $(X_1, \dots, X_d) \stackrel{d}{=} (X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(d)})$ für jede Permutation $(\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(d))$ von $(1, 2, \dots, d)$.

Definition 21 Eine Copula C heißt vertauschbar wenn sie die Gesamtverteilung eines vertauschbaren Zufallsvektors (mit Gleichverteilungen als Randverteilungen) ist.

Für eine solche Copula gilt:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_d) = C(u_{\pi(1)}, u_{\pi(2)}, \dots, u_{\pi(d)})$$

für jede Permutation $(\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(d))$ von $(1, 2, \dots, d)$.

Beispiele von vertauschbaren Copulas: Gumbel, Clayton, Gauss’sche Copula C_P^{Ga} , t-Copula $C_{\nu, P}^t$ für den Fall, dass P eine Equikorrelationsmatrix ist: $R = \rho J_d + (1 - \rho)I_d$. $J_d \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ist eine Matrix bestehend aus lauter Einsen, und $I_d \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ist die d -dimensionale Einheitsmatrix.

Für bivariate vertauschbare Copulas gilt:

$$P(U_2 \leq u_2 | U_1 = u_1) = P(U_1 \leq u_1 | U_2 = u_2).$$

Theorem 19 Sei $(X_1, X_2)^T$ ein normalverteilter Zufallsvektor. Dann gilt: $\lambda_U(X_1, X_2) = \lambda_L(X_1, X_2) = 0$.

Korollar 2 Sei $(X_1, X_2)^T$ ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen und einer Gauss'schen Copula C_ρ^{Ga} , wobei ρ der Koeffizient der linearen Korrelation zwischen X_1 und X_2 ist. Dann gilt: $\lambda_U(X_1, X_2) = \lambda_L(X_1, X_2) = 0$.

Theorem 20 Sei $(X_1, X_2)^T$ ein t -verteilter Zufallsvektor mit ν Freiheitsgraden, Mittelwert 0 und linearer Korrelationsmatrix R : $(X_1, X_2)^T \sim t_2(0, \nu, R)$. Für $R_{12} > -1$ gilt:

$$\lambda_U(X_1, X_2) = \lambda_L(X_1, X_2) = 2\bar{t}_{\nu+1} \left(\sqrt{\nu+1} \frac{\sqrt{1-R_{12}}}{\sqrt{1+R_{12}}} \right)$$

Beweis: Ähnlich wie der Beweis von Satz 19. Hinweis:

$$X_2|X_1 = x \sim \left(\frac{\nu+1}{\nu+x^2} \right)^{1/2} \frac{X_2 - \rho x}{\sqrt{1-\rho^2}} \sim t_{\nu+1}$$

.

Korollar 3 Sei $(X_1, X_2)^T$ ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen und einer t -copula $C_{\nu, R}^t$ mit ν Freiheitsgraden und einer Korrelationsmatrix R . Dann gilt:

$$\lambda_U(X_1, X_2) = \lambda_L(X_1, X_2) = 2\bar{t}_{\nu+1} \left(\sqrt{\nu+1} \frac{\sqrt{1-R_{12}}}{\sqrt{1+R_{12}}} \right)$$

Theorem 21 Sei $(X_1, X_2)^T$ ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen und einer Gauss'schen copula C_ρ^{Ga} , wobei ρ der Koeffizient der linearen Korrelation zwischen X_1 und X_2 ist. Dann gilt:

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho \quad \text{und} \quad \rho_S(X_1, X_2) = \frac{6}{\pi} \arcsin \frac{\rho}{2}$$

Korollar 4 Sei $(X_1, X_2)^T$ ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen und einer elliptischen copula $C_{\mu, \Sigma, \psi}^E$. Dann gilt:

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = \frac{2}{\pi} \arcsin R_{12}, \quad \text{wobei} \quad R_{12} = \frac{\Sigma_{12}}{\sqrt{\Sigma_{11}\Sigma_{22}}}$$

Theorem 22 Sei $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$ ein elliptisch verteilter Vektor mit stetigen Randverteilungsfunktionen. Dann gilt:

$$\rho_\tau(X_i, X_j) = \frac{2}{\pi} \arcsin R_{ij}, \quad \text{wobei} \quad R_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}} \quad \text{für } i, j = 1, 2, \dots, d$$

Beweise von Satz 21, Satz 22 und Korollar 4: siehe McNeil et al. (2005).

Archimedische Copulas

Nachteile elliptischer Copulas:

- I.A. keine Darstellung in geschlossener Form möglich
- radial-symmetrisch

Bivariate Archimedische Copulas

Definition 22 Sei $\phi: [0, 1] \rightarrow [0, +\infty]$ stetig, streng monoton fallend, sodass $\phi(1) = 0$. Die pseudo-inverse Funktion $\phi^{[-1]}: [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$ von ϕ wird folgendermassen definiert:

$$\phi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \phi^{-1}(t) & 0 \leq t \leq \phi(0) \\ 0 & \phi(0) \leq t \leq \infty \end{cases}$$

$\phi^{[-1]}$ ist stetig und monoton fallend in $[0, \infty]$, streng monoton fallend in $[0, \phi(0)]$ und es gilt:

$$\phi^{[-1]}(\phi(u)) = u \text{ für } u \in [0, 1]$$

$$\phi(\phi^{[-1]}(t)) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq \phi(0) \\ \phi(0) & \phi(0) \leq t \leq +\infty \end{cases}$$

Falls $\phi(0) = +\infty$, dann $\phi^{[-1]} = \phi^{-1}$.

Theorem 23 Sei $\phi: [0, 1] \rightarrow [0, +\infty]$ stetig, streng monoton fallend in $[0, 1]$, sodass $\phi(1) = 0$, und sei $\phi^{[-1]}$ die pseudo-inverse Funktion von ϕ . Sei $C: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, sodass $C(u_1, u_2) = \phi^{[-1]}(\phi(u_1) + \phi(u_2))$. C ist eine Copula dann und nur dann wenn ϕ convex ist. Copula dieser Form heißen Archimedische Copulas. ϕ heißt Generator von C . Falls $\phi(0) = +\infty$, dann $\phi^{[-1]} = \phi^{-1}$ und $C(u_1, u_2) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \phi(u_2))$.

Beweis: Siehe Nelsen 1999.

Beispiel 16 Gumbel Copulas

Sei $\phi(t) = (-\ln t)^\theta$, $\theta \geq 1$, $t \in [0, 1]$.

$C_\theta^{Gu}(u_1, u_2) = \exp\left(-[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta]^{1/\theta}\right)$ ist die Gumbel

Copula mit Parameter θ .

Für $\theta = 1$: $C_1^{Gu} = u_1 u_2$.

$\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_\theta^{Gu} = M(u_1, u_2) = \min\{u_1, u_2\}$.

Die Gumbel Copulas haben eine obere Tail Abhängigkeit.

Beispiel 17 Clayton Copulas

Sei $\phi(t) = (t^{-\theta} - 1)/\theta$, $\theta > 0$.

$C_\theta^{Cl}(u_1, u_2) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$ ist die Clayton Copula mit Parameter θ .

$\lim_{\theta \rightarrow 0} C_\theta^{Cl} = u_1 u_2$ und $\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_\theta^{Cl} = M = \min\{u_1, u_2\}$.

Die Clayton Copulas haben eine untere Tail Abhängigkeit

Beispiel 18 $\phi(t) = 1 - t$, $t \in [0, 1]$. $\phi^{[-1]}(t) = \max\{1 - t, 0\}$.
 $C_\phi(u_1, u_2) = \max\{u_1 + u_2 - 1, 0\} = W(u_1, u_2)$.

D.h. die untere Fréchet Schranke ist eine Archimedische Copula.

Theorem 24 Sei $(X_1, X_2)^T$ ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungen und einer Archimedischen Copula C generiert von ϕ .
Dann gilt $\rho_\tau(X_1, X_2) = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)} dt$.

Beweis: Siehe Nelsen 1999.

Beispiel 19 *Kendalls Tau für Gumbel und Clayton Copulas*

Gumbel Copulas: $\phi(t) = (\ln t)^\theta$, $\theta \geq 1$.
 $\rho_\tau(\theta) = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)} dt = 1 - \frac{1}{\theta}$.

Clayton Copulas: $\phi(t) = (t^{-\theta} - 1)/\theta$, $\theta > 0$.
 $\rho_\tau(\theta) = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)} dt = \frac{\theta}{\theta+2}$.

Multivariate Archimedische Copulas

Definition 23 Eine Funktion $g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ heißt vollständig monoton wenn alle höheren Ableitungen von g existieren und folgende Ungleichungen gelten für $k = 0, 1, 2, \dots$:

$$(-1)^k \left(\frac{d^k}{ds^k} g(s) \right) \Big|_{s=t} \geq 0, \forall t \in (0, \infty)$$

Theorem 25 (Kimberling 1974)

Sei $\phi: [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ eine stetige und streng monoton fallende Funktion, sodass $\phi(0) = \infty$ und $\phi(1) = 0$. Die Funktion $C: [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$, $C(u) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \phi(u_2) + \dots + \phi(u_d))$ ist eine Copula für $d \geq 2$ dann und nur dann wenn ϕ^{-1} vollständig monoton in $[0, \infty)$ ist.

Lemma 6 Eine Funktion $\psi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ist die Laplace-Stieltjes Transformation einer Verteilungsfunktion G in $[0, \infty)$ ($\psi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dG(x)$, $s \geq 0$) dann und nur dann, wenn ψ vollständig monoton und $\psi(0) = 1$ gilt.

Theorem 26 Sei G eine Verteilungsfunktion in $[0, \infty)$, sodass $G(0) = 0$ und sei ψ die Laplace-Stieltjes Transformation von G

$$\psi(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dG(x), \text{ für } s \geq 0.$$

Sei X eine ZV mit Verteilungsfunktion G und seien U_1, U_2, \dots, U_d bedingt unabhängige Zufallsvariablen in $[0, 1]$ für ein gegebenes $X = x$ mit folgender bedingter Verteilungsfunktion:

$$F_{U_k|X=x}(u) = \exp(-x\psi^{-1}(u)) \text{ für } u \in [0, 1].$$

Es gilt dann

$P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2, \dots, U_d \leq u_d) = \psi(\psi^{-1}(u_1) + \psi^{-1}(u_2) + \dots + \psi^{-1}(u_d)).$
und die Verteilungsfunktion von $U = (U_1, U_2, \dots, U_d)$ ist eine Archimedische Copula mit Generator ψ^{-1} .

Vorteile und Nachteile Archimedischer Copulas:

- Modellierung einer breiteren Klasse von Abhängigkeitsstrukturen
- Darstellung in geschlossener Form möglich
- Wenige freie Parameter vorhanden
- Technische Voraussetzungen für die Generator -unktionen multivariater Archimedische Copulas.