# Risiko und Risikomanagement: Hintergrund und Ziele

**Begriffsherkunft:** Risicare: Gefahr laufen, wagen; Resecum: Felsklippe

**Risiko**: die aus der Unvorhersagbarkeit der Zukunft resultierende Möglichkeit eines Abweichens von (Unternehmens-)Zielen

**Risikomanagement:**ist die systematische Erfassung und Bewertung von Risiken sowie die Steuerung von Reaktionen auf festgestellte Risiken.

**Gegenstand des RM:**

- Identifikation von Risiken („Exposure-Ermittlung“) unter Berücksichtigung von Risikointerdependenzen
- Bewertung/Messung von Risiken
- Bewältigung von Risiken
- Steuerung der Risikoabwehr
- Monitoring, also Früherkennung
- Strukturierung und Dokumentation in einem Risikomanagementsystem.

# Risiko und Risikomanagement: Hintergrund und Ziele - Folgerung

**Zentrale Fragen des strategischen RM:**

- Welche sind die strategischen Risiken?
- Welche Risiken soll das Unternehmen selbst tragen?
- Welche(r) Instrumente(mix) sollen zur Steuerung der Risiken zum Einsatz kommen?
- Welches Risikodeckungspotential ist erforderlich?
- Welcher risikoadjustierte Erfolgsmaßstab dient als Zielgröße der Unternehmenssteuerung?

**Beispiel 1** *Anfangskapital* $V_0 = 100$

Spiel: man verliert oder gewinnt 50 mit Wahrsch. jeweils 1/2.

Kapital nach dem Spiel $V_1 = \begin{cases} 150 & \text{mit Wahrsch. } 1/2 \\ 50 & \text{mit Wahrsch. } 1/2 \end{cases}$

Sei $X := V_1 - V_0$ der Gewinn. Die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable $X$ heißt **Gewinnverteilung** *(GV)*

Die Verteilungsfunktion von $L := V_0 - V_1$ heißt **Verlustverteilung** *(VV)*.

$L \geq 0 \Rightarrow$ Risiko!

Viele Leute hätten lieber keinen Gewinn und keinen Verlust mit Sicherheit als entweder Gewinn oder Verlust von 50 Einheiten mit Wahrsch. von jeweils 1/2. **Risikoaversion!**

Die Entscheidung, ob gespielt wird oder nicht, hängt von der Verlustverteilung ab. Diese ist aber in der Regel unbekannt! Auch bei einer bekannten Verlustverteilung hätte der Spieler gerne eine Kennzahl, die ihm zeigt wie riskant das Spiel ist!

**Definition 1** *Ein Risikomaß $\rho$ ist eine Abbildung der Zufallsvariablen zu den reellen Zahlen, die jeder Zufallsvariable $L$ eine reelle Zahl $\rho(L) \in \mathbb{R}$ zuordnet.*

Bsp. Standardabweichung, Quantil der Verlustverteilung, ...

## Warum Risikomanagement

Das Volumen des risikoreichen Handels im Globalen Markt steigt kontinuierlich

**Global OTC Derivatives: Nominalwert in Billionen von USD***

| Kontrakte | 2009 | 2008 | 2007 | 2006 | 2005 | 2004 | 2003 | 2002 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| interest rate derivatives | 426,7 | 403 | 382,3 | 285,7 | 213,2 | 164,5 | 142,3 | 99,8 |
| credit default swaps | 30,4 | 38,6 | 62,2 | 34,4 | 17,1 | 5,44 | 3,78 | 2,15 |
| equity derivatives | 6,8 | 8,7 | 10 | 7,2 | 5,6 | 4,2 | 3,4 | 2,5 |

Beispiele großer Verluste in den Finanzmärkten
( siehe zB. `http://www.erisk.com`)

- Orange County (1994)
- LTCM (1998)
- BAWAG (2006)
- Lehman Brothers (2008)
- Barings Bank (1995)
- Bankgesellschaft Berlin (2001)
- Fannie May and Freddie Mac (2008)
- Hypo Real Estate (2008)

*Quelle: ISDA - International Swaps and Derivatives Association, Inc. `http://www.isda.org`

**Risikotypen**

Für eine Organisation entsteht Risiko durch Ereignisse oder Handlungen, das/der die Organisation verhindern könnten ihre Verpflichtungen zu erfüllen bzw. ihre Strategien durchzuführen.

Finanzielles Risiko:

- Marktrisiko
- Kreditrisiko
- Operationelles Risiko
- Liquiditätsrisiko, Rechtliches Risiko, Rufschädigungsrisiko

Es wird versucht diese Risiken möglichst genau abzuschätzen; dazu wird idealerweise die GV/VV verwendet.

**Regulierung und Aufsicht**

Gründung des Basler Ausschusses für Bankenaufsicht in 1974.

Sicherheitskapital abhängig von der GV/VV.
Basler Ausschuss: Vorschläge und Richtlinien über Anforderungen und Methoden zur Berechnung des Sicherheitskapitals
International akzeptierte Standards für die Berechnung des Volumens des Sicherheitskapitals sowie darauf basierende gesetzliche Bestimmungen werden angestrebt. Kontrolle durch die Aufsichtsbehörde.

1988 Basel I: Internationale Mindestkapitalanforderungen insbesondere bzgl. Kreditrisiko.

1996 Novelle formuliert standardisierte Modelle für Marktrisiko mit einer Option für größere Banken zur Verwendung von Value at Risk (VaR) Modellen.

2007 Basel II: Mindestkapitalanforderungen ( bzgl. Kredit- und Marktrisiko sowie bzgl. operationelle Risiken), aufsichtliche Überprüfungsverfahren, Marktdisziplin*.

2010 BASEL III - Verbesserung und Weiterentwicklung von BASEL II im Hinblick auf die Umsetzbarkeit, operationelles Risiko und Liquiditätsrisiko

*Siehe `http://www.bis.org`

# Ermittlung der Verlustfunktion

## Verlustoperatoren

$V(t)$ - Wert des Portfolio zum Zeitpunkt $t$

Zeithorizont $\Delta t$

Verlust: $L_{[t,t+\Delta t]} := -(V(t+\Delta t) - V(t))$

Diskretisierung der Zeit: $t_n = n\Delta t$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$L_{n+1} := L_{[t_n, t_{n+1}]} = L_{[n\Delta t, (n+1)\Delta t]} = -(V_{n+1} - V_n),$$

wobei $V_n := V(n\Delta t)$

**Beispiel 2** *Ein Aktienportfolio*

Das Portfolio besteht aus $\alpha_i$ Stück von Aktie $A_i$, $i = 1, 2, \ldots, d$.

$S_{n,i}$ Preis von Aktie $i$ zum Zeitpunkt $n$.

$V_n = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i S_{n,i}$

$X_{n+1,i} := \ln S_{n+1,i} - \ln S_{n,i}$, $Z_{n,i} := \ln S_{n,i}$

Seien $w_{n,i} := \alpha_i S_{n,i}/V_n$, $i = 1, 2, \ldots, d$, die relativen Portfoliogewichte.

**Verlustoperatoren eines Aktienportfolios (Folgerung)**

Es gilt

$$L_{n+1} := -\sum_{i=1}^{d} \alpha_i S_{n,i}\Big(\exp\{X_{n+1,i}\}-1\Big) = -V_n \sum_{i=1}^{d} w_{n,i}\Big(\exp\{X_{n+1,i}\}-1\Big) =: l_n(X_{n+1})$$

Linearisierung: $e^x = 1 + x + o(x^2) \sim 1 + x$

$$L_{n+1}^{\triangle} = -V_n \sum_{i=1}^{d} w_{n,i} X_{n+1,i} =: l_n^{\triangle}(X_{n+1})$$

**Der allgemeiner Fall**

$V_n = f(t_n, Z_n)$; $Z_n = (Z_{n,1}, \ldots, Z_{n,d})$ ist ein Vektor von Risikofaktoren

Veränderungen der Risikofaktoren: $X_{n+1} = Z_{n+1} - Z_n$

$L_{n+1} = -\Big(f(t_{n+1}, Z_n + X_{n+1}) - f(t_n, Z_n)\Big) =: l_n(X_{n+1})$ wobei

$l_n(x) := -\Big(f(t_{n+1}, Z_n + x) - f(t_n, Z_n)\Big)$ ist der Verlustoperator

Der linearisierter Verlust:

$L^{\Delta}_{n+1} = -\Big(f_t(t_n, Z_n)\Delta t + \sum_{i=1}^{d} f_{z_i}(t_n, Z_n) X_{n+1,i}\Big)$,

wobei $f_t$ und $f_{z_i}$ die partiellen Ableitungen von $f$ sind.

Der linearisierter Verlustoperator:

$l^{\Delta}_n(x) = -\Big(f_t(t_n, Z_n)\Delta t + \sum_{i=1}^{d} f_{z_i}(t_n, Z_n) x_i\Big)$

**Finanzderivate** sind Finanzprodukte oder Kontrakte, die aus einem fundamentalen Basiswert (zB. Aktienpreis, Aktienindex, Zinssatz, Rohstoffpreis) abgeleitet werden.

**Definition 2** *Eine* Europäische Call Option (ECO) *an einer bestimmten Aktie $S$ gibt dem Besitzer das Recht aber nicht die Pflicht, die Aktie $S$ an einem Tag $T$ um einen Preis $K$ zu kaufen. Die Option wird um einen bestimmten Preis am Tag* 0 *erworben.*

*Wert der ECO zum Zeitpunkt $t$:* $C(t) = \max\{S(t) - K, 0\}$,
*wobei $S(t)$ der Preis der Aktie $S$ zum Zeitpunkt $t$ ist.*

**Definition 3** *Eine Nullcouponanleihe (NCA) mit Laufzeit $T$ ist ein Kontrakt, das dem Besitzer eine Währungseinheit zum Zeitpunkt $T$ bringt.*

**Definition 4** *Ein Währung-Forward (WF) ist ein Kontrakt zwischen zwei Parteien, der dem Käufer das Recht einräumt, eine bestimmte Menge $\bar{V}$ einer fremden Währung zu einem bestimmten Zeitpunkt $T$ und zu einem bestimmten Wechselkurs $\bar{e}$ vom Verkäufer zu erwerben.*

**Beispiel 3** *Ein Anleihen-Portfolio*

Sei $B(t,T)$ der Preis der Nullcouponanleihe zum Zeitpunkt $t < T$.

Die *kontinuierliche Rendite (yield)*, $y(t,T) := -\frac{1}{T-t} \ln B(t,T)$, wird interpretiert als der kontinuierlicher Zinssatz, der zum Zeitpunkt $t$ für den gesamtem Zeitraum $[t,T]$ vereinbart wurde.

Für unterschiedliche Laufzeiten gibt es unterschiedliche Rendite.

*Renditenkurve (yield curve)* zum fixen Zeitpunkt $t$: $T \mapsto y(t,T)$

PF besteht aus $\alpha_i$ Stück der Nullkuponanleihe $i$ mit Laufzeit $T_i$ und Preis $B(t,T_i)$, $i = 1,2,\ldots,d$.

PF-Wert:

$$V_n = \sum_{i=1}^d \alpha_i B(t_n,T_i) = \sum_{i=1}^d \alpha_i exp\{-(T_i - t_n)Z_{n,i}\} = f(t_n,Z_n)$$

wobei $Z_{n,i} := y(t_n,T_i)$ sind die Risikofaktoren.
Sei $X_{n+1,i} = Z_{n+1,i} - Z_{n,i}$ die Veränderung der Risikofaktoren.

$$l_{[n]}(x) = -\sum_{i=1}^{d} \alpha_i B(t_n, T_i)\left(exp\{Z_{n,i}\Delta t - (T_i - t_{n+1})x_i\} - 1\right)$$

$$L^{\triangle}_{n+1} = -\sum_{i=1}^{d} \alpha_i B(t_n, T_i)\left(Z_{n,i}\Delta t - (T_i - t_{n+1})X_{n+1,i}\right)$$

**Beispiel 4** *Ein Währung-Forward-Portfolio*

Die Partei, die die fremde Währung kauft, hält eine *Long Position*. Die Partei, die verkauft, hält eine *Short Position*.

Long Position über ($\bar{V}$) Einheiten in einem Währung-Forward mit Ausübungszeitpunkt $T$

$\Longleftrightarrow$

Long Position über $\bar{V}$ Einheiten in einer fremden Nullkuponanleihe (NCA) mit Laufzeit $T$

und

Short Position über $\bar{e}\bar{V}$ Einheiten in einer einheimischen Nullkuponanleihe mit Laufzeit $T$.

Annahmen:

Euro-Investor hält eine Long Position in ein USD/EUR Forward über $\bar{V}$ USD.

Sei $B^f(t,T)$ ( $B^d(t,T)$) der Preis einer USD- (EUR)-basierten NCA.

Sei $e(t)$ der Kassa Wechselkurs (spot exchange rate) für USD/EUR.

Wert der Long Position des Währung-Forwards zum Zeitpunkt $T$ : $V_T = \bar{V}(e(T) - \bar{e})$.

Die Short Position in der einheimischen NCA kann wie im Beispiel (3) behandelt werden.

Die Long Position in der fremden NCA:

Risikofaktoren: $Z_n = (\ln e(t_n), y^f(t_n, T))^T$

Wert der Long Position: $V_n = \bar{V} \exp\{Z_{n,1} - (T - t_n) Z_{n,2}\}$

Der linearisierte Verlust: $L^{\Delta}_{n+1} = -V_n(Z_{n,2}\Delta t + X_{n+1,1} - (T - t_{n+1})X_{n+1,2})$

wobei $X_{n+1,1} := \ln e(t_{n+1}) - \ln e(t_n)$ und $X_{n+1,2} := y^f(t_{n+1}, T) - y^f(t_n, T)$

**Beispiel 5** *Europäische Call Option (ECO)*

in einer Aktie $S$ mit Laufzeit $T$, Preis $S_T$ zum Zeitpunkt $T$ und Ausübungspreis (*Strikepreis*) $K$.

Wert der Call Option zum Zeitpunkt $T$: $\max\{S_T - K, 0\}$

Preis der ECO zum Zeitpunkt $t < T$: $C = C(t, S, r, \sigma)$ (Black-Scholes Modell), wobei $t$ ist die Zeit, $S$ ist der Preis der Aktie, $r$ ist der Zinssatz und $\sigma$ ist die Volatilität, alles zum Zeitpunkt $t$.

Risikofaktoren: $Z_n = (\ln S_n, r_n, \sigma_n)^T$;

$X_{n+1} = (\ln S_{n+1} - \ln S_n, r_{n+1} - r_n, \sigma_{n+1} - \sigma_n)^T$

PF-Wert: $V_n = C(t_n, S_n, r_n, \sigma_n) = C(t_n, exp(Z_{n,1}), Z_{n,2}, Z_{n,3})$

Der linearisierte Verlust: $L^{\Delta}_{n+1} = -(C_t \Delta t + C_S S_n X_{n+1,1} + C_r X_{n+1,2} + C_\sigma X_{n+1,3})$

The greeks: $C_t$ - theta, $C_S$ - delta, $C_r$ - rho, $C_\sigma$ - Vega

**Verwendungszweck von Risikomanagement:**

- Bestimmung der Mindestkapitalanforderungen:
  Kapital, das benötigt wird um event. Verluste abzudecken.

- Als Management Tool:
  zur Bestimmung der Risiken, die unterschiedliche Einheiten einer Firma eingehen dürfen.

**Einige grundlegende Risikomaße**

- Gewichtete Summe der Aktiva (Assetklassenspezifische Gewichte)

  ZB. Basel I (1998):

$$\textit{Cooke Ratio} = \frac{\text{Eigenkapital}}{\text{risikogewichtete Summe der Aktiva}} \geq 8\%$$

$$\text{Gewicht} := \begin{cases} 0\% & \text{für Forderungen gegenüber staatlichen Schuldnern (OECD-Staaten)} \\ 20\% & \text{für Forderungen gegenüber Kreditinstituten} \\ 50\% & \text{für grundpfandrechtlich gesicherte Realkredite} \\ 100\% & \text{für alle sonstigen Risikoaktiva, d. h. alle Kredite an Unternehmen} \end{cases}$$

Nachteile: Kein Unterschied zwischen Long und Short Positionen, berücksichtigt keine Diversifikationseffekte.

- Sensitivität gegenüber Risikofaktoren

  Portfoliowert zum Zeitpunkt $t_n$: $V_n = f(t_n, Z_n)$,
  $Z_n$ ist ein Vektor von $d$ Risikofaktoren

  Sensitivitätskoeffizienten: $f_{z_i} = \frac{\delta f}{\delta z_i}(t_n, Z_n)$, $1 \leq i \leq d$

  Beispiel: "The Greeks" eines PF sind die Sens.koeffizienten

  Nachteile: Aggregierung zum Risikomaß bei simultanen Veränderungen von mehreren Faktoren schwierig;
  bei mehreren Märkten ist Aggregierung zum Risikomaß für das Gesamtportfolio schwierig;

- Szenario basierte Risikomaße

  Sein $N$ die Anzahl möglicher Veränderungen der Risikofaktoren (= Szenarien).

  Sei $\chi = \{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$ die Menge der Szenarien und
  $l_{[n]}(\cdot)$ der Verlustoperator des PF.

  Jedem Szenario wird ein Gewicht $w_i$, $1 \leq i \leq N$, zugeordnet

  Portfoliorisiko:

  $\Psi[\chi, w] = \max\{w_1 l_{[n]}(X_1), w_2 l_{[n]}(X_2), \ldots, w_N l_{[n]}(X_N)\}$

**Beispiel 6** *SPAN Regeln verwendet von CME* (siehe Artzner et al., 1999)

*PF besteht aus mehreren einheiten eines Future Kontrakts und mehreren Put bzw. Call Optionen desselben Kontakts mit gleicher Laufzeit.*

*Berechnung der SPAN Marge:*

*Szenarien $i$, $1 \leq i \leq 14$:*

| Szenarien 1 bis 8 | | Szenarien 9 bis 14 | |
|---|---|---|---|
| Volatilität | Preis der Future | Volatilität | Preis der Future |
| $\nearrow$<br>$\searrow$ | $\nearrow \frac{1}{3} * Range$<br>$\nearrow \frac{2}{3} * Range$<br>$\nearrow \frac{3}{3} * Range$<br>$\longrightarrow$ | $\nearrow$<br>$\searrow$ | $\searrow \frac{1}{3} * Range$<br>$\searrow \frac{2}{3} * Range$<br>$\searrow \frac{3}{3} * Range$ |

*Szenarien $i$, $i = 15, 16$ stellen extreme Bewegungen nach oben bzw. unten des Futurepreises*

$$w_i = \begin{cases} 1 & 1 \leq i \leq 14 \\ 0,35 & 15 \leq i \leq 16 \end{cases}$$

*Ein bestimmtes Modell (zB. Black-Scholes) wird verwendet um die Optionpreise in den entsprechenden Szenarien zu generieren.*

- **Risikomaße basierend auf die Verlustverteilung**

  Sei $F_L := F_{L_{n+1}}$ die Verteilung der Verlust $L_{n+1}$.

  Die Parameter von $F_L$ werden anhand von historischen Daten entweder direkt oder mit Hilfe der Risikofaktoren geschätzt.

  1. **Die Standardabweichung** $std(L) := \sqrt{\sigma^2(F_L)}$

     Wird vor allem in der PF-Theorie verwendet.

     Nachteile:

     – STD existiert nur für Verteilungen mit $E(F_L^2) < \infty$, d.h. nicht ansetzbar bei leptokurtischen ("fat tailed") Verlustverteilungen;

     – Gewinne und Verluste beeinflussen die Standardabweichung gleichermaßen.

     **Beispiel 7** $L_1 \sim N(0,2)$, $L_2 \sim t_4$ *(Student Verteilung mit 4 Freiheitsgraden)*

     *Es gilt* $\sigma^2(L_1) = 2$ *und* $\sigma^2(L_2) = \frac{m}{m-2} = 2$

     *Die Verlustwarsch. ist jedoch viel größer bei* $L_2$ *als bei* $L_1$*.*

     *Plote den logarithmischen Quotient* $\ln[P(L_2 > x)/P(L_1 > x)]$*!*

2. **Value at Risk** $(VaR_\alpha(L))$

**Definition 5** *Sei $L$ eine Verlustfunktion und $\alpha \in (0,1)$ ein gegebenes Konfidenzniveau.*

*$VaR_\alpha(L)$ ist die kleinste Zahl $l$, sodass $P(L > l) \leq 1 - \alpha$ gilt.*

$VaR_\alpha(L) = \inf\{l \in \mathbb{R} \colon P(L > l) \leq 1 - \alpha\} =$
$\inf\{l \in \mathbb{R} \colon 1 - F_L(l) \leq 1 - \alpha\} = \inf\{l \in \mathbb{R} \colon F_L(l) \geq \alpha\}$

zB. Vorschlag von BIS (Bank of International Settlements): $VaR_{0.99}(L)$ über ein Horizont von 10 Tagen soll als Maß für das Marktrisiko eines PF verwendet werden.

**Definition 6** *Sei $F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton steigende Funktion (d.h. $x \leq y \Longrightarrow F(x) \leq F(y)$). Die Funktion*

$$F^{\leftarrow} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto \inf\{x \in \mathbb{R} \colon F(x) \geq y\}$$

*heißt verallgemeinerte inverse Funktion von $F$.*

*Hier gilt $\inf \emptyset = -\infty$.*

Falls $F$ streng monoton steigend, dann gilt $F^{-1} = F^{\leftarrow}$.

**Übung 1** *Sei $F \colon [0, +\infty) \to [0,1]$ mit $F(x) = \begin{cases} 1/2 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases}$*

$F^{\leftarrow} =?$

**Definition 7** *Sei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton steigende Funktion.* $q_\alpha(F) := \inf\{x \in \mathbb{R}\colon F(x) \geq \alpha\}$ *heist $\alpha$-Quantil von $F$.*

Für die Funktion $L$ und seiner Verteilungsfunktion $F$ gilt:

$$VaR_\alpha(L) = q_\alpha(F) = F^{\leftarrow}(\alpha).$$

**Beispiel 8** *Sei $L \sim N(\mu, \sigma^2)$.*
*Es gilt $VaR_\alpha(L) = \mu + \sigma q_\alpha(\Phi) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)$,*
*wobei $\Phi$ die Verteilungsfunktion einer ZV $X \sim N(0,1)$ ist.*

**Übung 2** *Portfolio PF besteht aus 5 Stück einer Aktie $A$. Der heutige Preis von $A$ ist $S_0 = 100$. Die täglichen Log-Rendite sind normal verteilt: $X_1 = \ln\frac{S1}{S_0}$, $X_2 = \ln\frac{S2}{S_1}, \ldots \sim N(0, 0.01)$. Sei $L_1$ der 1-Tages PF-Verlust von heute auf morgen.*

*(a) Berechnen Sie $VaR_{0.99}(L_1)$.*

*(b) Berechnen Sie $VaR_{0.99}(L_{100})$ und $VaR_{0.99}(L_{100}^{\Delta})$, wobei $L_{100}$ der 100-Tage PF-Verlust über einen Zeithorizont von 100 Tagen ausgehend von heute ist. $L_{100}^{\Delta}$ ist die Linearisierung des obigen 100-Tage PF-Verlustes.*

*Hinweis: Für $Z \sim N(0,1)$ gilt $F_Z^{-1}(0.99) \approx 2.3$.*