Koherente Risikomaße

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Ereignismenge Ω, Ereignisalgebra $\mathcal{F}$ und Wahrscheinlichkeitsmaß P.

Sei $L^{(0)}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ die Menge aller Zufallsgrößen aus $(\Omega, \mathcal{F})$, die fast sicher endlich sind.

Sei $M \subseteq L^{(0)}$.

Sei $\rho: M \to \mathbb{R}$ ein Risikomaß in M

Definition 6 *Ein Risikomaß ρ, das folgende Eigenschaften besitzt, heißt koherent auf M:*

(C1) *Invarianz bzgl. Translation:*

$\rho(X + r) = \rho(X) + r$, *für jede Konstante r und jedes $X \in M$.*

(C2) *Subadditivität:*

$\forall X_1, X_2 \in M$ *gilt* $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$.

(C3) *Positive Homogenität:*

$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$, $\forall \lambda \geq 0$, $\forall X \in M$.

(C4) *Monotonie:*

$\forall X_1, X_2 \in M$ *gilt* $X_1 \overset{f.s.}{\leq} X_2 \Longrightarrow \rho(X_1) \leq \rho(X_2)$.

Konvexe Risikomaße

Betrachte die Eigenschaft

(C5) Konvexität:

$\forall X_1, X_2 \in M$, $\forall \lambda \in [0,1]$ gilt

$$\rho(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \leq \lambda\rho(X_1) + (1-\lambda)\rho(X_2).$$

(C5) ist schwächer als (C2) und (C3), d.h. (C2) und (C3) zusammen implizieren (C5) aber nicht umgekehrt.

Definition 7 *Ein Risikomaß ρ, das die Eigenschaften (C1),(C4) und (C5) besitzt, heißt konvex auf M.*

Beobachtung: VaR ist i.A. nicht koherent

Sei das Wahrscheinlichkeitsmaß P durch einer beliebigen kontinuierlichen oder diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung F definiert.

$VaR_\alpha(F) = F^{\leftarrow}(\alpha)$ besitzt die Eigenschaften (C1), (C3) und (C4), jedoch i.A. nicht die Subadditivität

Beispiel 8 *Sei das Wahrscheinlichkeitsmaß P durch die Binomialverteilung $B(p,n)$ für $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$, definiert.*

Wir zeigen: $VaR_\alpha(B(p,n))$ ist nicht subadditiv.

ZB.: Berechnen Sie den VaR der Verluste eines Bond-Portfolios bestehend aus 100 Bonds, die unabhängig von einander mit Wahrscheinlichkeit p defaultieren. Beobachten Sie, dass dieser Wert größer als das Hunderfache des VaRs des Verlustes eines einzigen Bonds ist.

Theorem 6 *Sei $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $M \subseteq L^{(0)}(\Omega,\mathcal{F},P)$ die Menge aller in $(\Omega,\mathcal{F},P)$ definierten Zufallsvariablen mit einer kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsverteilung F. $CVaR_\alpha$ ist eine koherentes Risikomaß in M, $\forall \alpha \in (0,1)$.*

Elliptische Verteilungen und Portfoliooptimierung

Ein Investor möchte in d (risikoreichen) Assets investieren. Sei $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d)^T$ der Zufallsvektor der Asset-Returns mit $E(X) = \mu$ und $Cov(X) = \Sigma$.

Sei $\mathcal{P}$ die Klasse aller Portfolios bestehend aus den obigen d Aktien.

Jedes (long-short) Portfolio aus $\mathcal{P}$ ist eindeutig durch den Gewichtsvektor $w = (w_i) \in \mathbb{R}^d$ definiert. $w_i > 0$ enstpricht einer Long-Investition und $w_i < 0$ entspricht einer Short-Investition. Daher:

$$\mathcal{P} = \left\{ w = (w_i) \in \mathbb{R}^d \colon \sum_{i=1}^{d} |w_i| = 1 \right\}$$

Die Portfoliorendite ist die Zufallsvariable $Z(w) = \sum_{i=1}^{d} w_i X_i$.

Die erwartete Portfoliorendite: $E(Z(w)) = w^T \mu$.

Es gelte $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$ mit $E(X_k^2) < \infty$ und $\Sigma = cov(X)$.

Sei $\mathcal{P}_m$ die Klasse jener PF aus $\mathcal{P}$ sodass $E(Z(w)) = m$, $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$.

$$\mathcal{P}_m = \{ w = (w_i) \in \mathbb{R}^d, \sum_{i=1}^{d} |w_i| = 1, w^T \mu = m \}$$

Das Mean-Variance PF-Opt.modell (Markowitz 1952, 1987) lautet

$$\min_{w \in \mathcal{P}_m} var(Z(w)) \tag{1}$$

oder äquivalent (siehe zB. Campbell et al. (1997))

$$\begin{array}{rc} \min\limits_{w} & w^T \Sigma w \\ \text{sodass} & \\ & w^T \mu = m \\ & \sum_{i=1}^{d} |w_i| = 1 \end{array}$$

Sei ρ ein Risikomaß. Das **Mean-ρ PF-Optimierungsmodell** lautet:

$$\min_{w \in \mathcal{P}_m} \rho(Z(w)) \tag{2}$$

Sei $\rho = VaR_\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$. Das **Mean-VaR PF-Optimierungsmodell** lautet:

$$\min_{w \in \mathcal{P}_m} VaR_\alpha(Z(w)) \tag{3}$$

Frage: Wie hängen die Probleme (1) und (2) (insbesondere (3)) zusammen?