

# Multivariate Verteilungen

## Zufallsvektoren und Modellierung der Abhängigkeiten

Ziel: Modellierung der Veränderungen der Risikofaktoren

$$X_n = (X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,d})$$

Annahme:  $X_{n,i}$  und  $X_{n,j}$  sind abhängig aber  $X_{n,i}$  und  $X_{n\pm k,j}$  sind unabhängig für  $k \in \mathbb{N}$  ( $k \neq 0$ ),  $1 \leq i, j \leq d$ .

## Grundlegende Eigenschaften von Zufallsvektoren

Ein  $d$ -dimensionaler Zufallsvektor  $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)^T$  wird durch die Verteilungsfunktion  $F$  spezifiziert

$$F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_d) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_d \leq x_d) = P(X \leq x).$$

Die  $i$ . Randverteilung  $F_i$  von  $F$  ist die Verteilungsfunktion von  $X_i$  und ist folgendermaßen gegeben:

$$F_i(x_i) = P(X_i \leq x_i) = F(\infty, \dots, \infty, x_i, \infty, \dots, \infty)$$

Die Verteilungsfunktion  $F$  ist stetig wenn es eine nicht negative Funktion  $f \geq 0$  gibt, sodass

$$F(x_1, x_2, \dots, x_d) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_d} f(u_1, u_2, \dots, u_d) du_1 du_2 \dots du_d$$

$f$  ist in diesem Fall die Dichte von  $F$ .

Die Komponenten von  $X$  sind unabhängig dann und nur dann wenn

$$F(x) = \prod_{i=1}^d F_i(x_i)$$

oder, wenn die Dichten  $f$  und  $f_i$ ,  $1 \leq i \leq d$ , existieren, dann sind die Komp. von  $X$  d.u.n.d. unabhängig wenn

$$f(x) = \prod_{i=1}^d f_i(x_i)$$

Ein Zufallsvektor wird durch seine charakteristische Funktion  $\phi_X(t)$  eindeutig spezifiziert:

$$\phi_X(t) := E(\exp\{it^T X\}), t \in \mathbb{R}^d$$

Wenn  $E(X_k^2) < \infty$  für alle  $k$ , dann ist die Kovarianzmatrix eines Zufallsvektors folgendermaßen gegeben:

$$Cov(X) = E((X - E(X))(X - E(X))^T)$$

### **Anmerkung:**

Für einen  $n$ -dimensionalen Zufallsvektor  $X$ , eine konstante Matrix  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und einen konstanten Vektor  $b \in \mathbb{R}^n$  gelten folgende Gleichungen:

$$E(BX + b) = BE(X) + b \quad Cov(BX + b) = BCov(X)B^T$$

**Beispiel 1** Für die multivariate Normalverteilung mit Mittelwert  $\mu$  und Kovarianzmatrix  $\Sigma$  sind die Dichtefunktion  $f$  bzw. die charakteristische Funktion  $\phi_X$  folgendermaßen gegeben ( $|\Sigma| = |\text{Det}(\Sigma)|$ ):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\Sigma|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu) \right\}, x \in \mathbb{R}^d$$

$$\phi_X(t) = \exp \left\{ it^T \mu - \frac{1}{2} t^T \Sigma t \right\}, t \in \mathbb{R}^d$$

### **Probleme bei Modellierung der Abhängigkeit zwischen Finanzgrößen mit Hilfe der (multivariaten) Normalverteilung**

- Finanzgrößen haben i.a. heavier Tails als die Normalverteilung
- Die Zusammenhänge bei größeren Verlusten sind i.a. stärker als bei “normalen” Werten. Diese Art von Zusammenhängen kann mit der multivariaten Normalverteilung nicht modelliert werden.

(Veranschaulichung der Problematik durch einen Vergleich zwischen Streudiagrammen von echten Daten und Scatter-Plots von Daten, die aus einer Normalverteilung mit geschätztem Erwartungsvektor und geschätzter Kovarianzmatrix simuliert werden.)