Wie wird eine hohe Schwelle u (POT Methode) gewählt?

- u zu groß: Wenige Beobachtungen für die Schätzung von $\widehat{\beta}$ und $\widehat{\gamma}$.
- u zu klein: die Approximation $\bar{F}_u(y) \approx \bar{G}_{\widehat{\gamma},\widehat{\beta}(u)}(u)$ ist nicht gut genug.

Grundidee: Inspektion des Plots der empirischen durchschnittlichen Exzess-Funktion und Auswahl einer Schwelle u_0, sodass die empirische durchschnittliche Exzess-Funktion für $u > u_0$ annähernd linear ist.

Begründung: die Durchschnittliche Exzess-Funktion der $GPD_{\gamma,0,\beta}$ ist linear!

Die empirische durchschnittliche Exzess-Funktion

Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d ZV.

Sei $N_u = \#\{i\colon 1 \le i \le n, X_i > u\}$ die Anzahl der Überschreitung von u durch X_i

Die empirische durchschnittliche Exzess-Funktion $e_n(u)$:

$$e_n(u) = \frac{1}{N_u} \sum_{i=1}^{n} (X_i - u) I\{X_i > u\}$$

Der Plot der durchschnittlichen Exzess-Funktion: $(X_{k,n}, e_n(X_{k,n}))$ für $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Wenn dieser Plot annähernd linear mit einem positiven Gradienten ist, so wird angenommen, dass die Verteilung einen heavy-tailed Pareto-ähnlichen Tail hat.

Schätzung der Parameter γ und β

Sei u eine gegebene Schwelle und Y_1,Y_2,...,Y_{N_u} Beobachtungen der Überschüsse $X_i > u$, $1 \leq i \leq n$.

Die Log-Likelihood Funktion:

$$\ln L(\gamma, \beta, Y_1, \ldots, Y_{N_u}) = -N_u \ln \beta - \left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) \sum_{i=1}^{N_u} \ln\left(1 + \frac{\gamma}{\beta} Y_i\right)$$

wobei $Y_i \geq 0$ für $\gamma > 0$ und $0 \leq Y_i \leq -\beta/\gamma$ für $\gamma < 0$.

$L(\gamma, \beta, Y_1, \ldots, Y_{N_u})$ ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass $\bar{F}_u(y) \approx \bar{G}_{\gamma,0,\beta}(y)$ unter der Bedingung, dass die Beobachtungen der Überschüsse Y_1,Y_2,...,Y_{N_u} sind.

Für die Ermittlung der Likelihood Funktion siehe Daley, Veve-Jones (2003) and Coles (2001).

Als Schätzer $\widehat{\gamma}$ und $\widehat{\beta}$ werden jene Werte von γ bzw. β verwendet, die die log-Likelihood Funktion maximieren (ML-Schätzer)

Die Methode funktioniert gut für $\gamma > -1/2$.
Die ML-Schätzer sind in diesem Fall normal verteilt:

$$(\widehat{\gamma} - \gamma, \frac{\widehat{\beta}}{\beta} - 1) \sim N(0, \Sigma^{-1}/N_u) \text{ wobei } \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1+\gamma & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Um die Unsicherheit über die einigermaßen willkürliche Auswahl von u zu reduzieren, überprüft man wie die ML-Schätzer in Abhängigkeit von u variieren.

Weiters wird der Schätzer

$$\bar{F}\widehat{(u+y)} = \frac{N_u}{n}\left(1 + \widehat{\gamma}\frac{y}{\widehat{\beta}}\right)^{-1/\widehat{\gamma}}$$

grafisch dargestellt und inspiziert.

Berechnung von Risikomaßen VaR und CVaR mit Hilfe der POT Methode

Seien X_1, X_2, ..., X_n Beobachtungen von i.i.d. ZVen mit unbekannter Verteilungsfunktion F. Direkt aus der POT Methode erhält man folgende Schätzer für die Randverteilung und das Quantil $q_p = VaR_p(F)$ von F

$$\bar{F}\widehat{(u+y)} = \frac{N_u}{n}\left(1+\widehat{\gamma}\frac{y}{\widehat{\beta}}\right)^{-1/\widehat{\gamma}}$$

$$\widehat{q}_p = u + \frac{\widehat{\beta}}{\widehat{\gamma}}\left(\left(\frac{n}{N_u}(1-p)\right)^{-\widehat{\gamma}} - 1\right)$$

Für $0 < \widehat{\gamma} < 1$ zeigen wir, dass $\widehat{CVaR_p}(F) = \widehat{q}_p + \frac{\widehat{\beta}+\widehat{\gamma}(\widehat{q}_p-u)}{1-\widehat{\gamma}}$ ein Schätzer von $CVaR_p(F)$ ist.

Der Beweis erfolgt mit Hilfe der folgenden 2 Schritte:

(1) Sei X eine ZV mit $X \sim GPD_{\gamma,0,\beta}$ und $0 < \gamma < 1$. Es gilt

$$CVaR_p(X) = q_p + \frac{\beta + \gamma q_p}{1-\gamma},$$

wobei $q_p := VaR_p(X)$ das p-Quantil von X ist.

(2) Sei X eine ZV mit $X \sim F$. Die Randverteilung $\bar{F}(x)$ wird durch $\bar{F}(u)\bar{G}_{\gamma,0,\beta}(x-u)$ approximiert. Daraus folgt $F \approx \tilde{F}$ mit $\tilde{F} := 1 - \bar{F}(u)\bar{G}_{\gamma,0,\beta}(x-u)$. Für $q_p > u$ ist der CVaR der Approximation $\tilde{F}$ folgendermaßen gegeben:

$$CVaR_p(\tilde{F}) = q_p + \frac{\beta + \gamma(q_p - u)}{1-\gamma}$$