

## Grenzverteilungen von normierten und zentrierten Maxima

$(X_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , nicht degenerierte i.i.d. ZV mit Verteilungsfunktion  $F$ .

Für  $n \geq 1$ ,  $M_n := \max\{X_i: 1 \leq i \leq n\}$

Frage: Welche sind die möglichen (nicht degenerierten) Grenzverteilungen von normierten und zentrierten  $M_n$ ?

D.h. wir untersuchen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(a_n^{-1}(M_n - b_n) \leq x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n \leq u_n),$$

wobei  $u_n = a_n x + b_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

### **Theorem 5** (*Poisson Approximation*)

Sei  $\tau \in [0, \infty]$  und eine Zahlenfolge  $u_n \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\bar{F}(u_n) = \tau \iff \lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n \leq u_n) = \exp\{-\tau\}.$$

**Übung 5** Überzeugen Sie sich mit Hilfe des “convergence to type” Satzes, dass  $H$  und  $\tilde{H}$  vom selben Typus sind, wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1}(M_n - b_n) = H$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{a}_n^{-1}(M_n - \tilde{b}_n) = \tilde{H}$ .

**Definition 15** Eine nicht degenerierte ZV  $X$  heißt max-stabil wenn für jedes  $n \geq 2$   $\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \stackrel{d}{=} a_n X + b_n$  für unabhängige Kopien  $X_1, X_2, \dots, X_n$  von  $X$  und geeignete Konstanten  $a_n > 0$  und  $b_n \in \mathbb{R}$ .

**Theorem 6** Die Klasse von max-stabilen Verteilungen stimmt mit der Klasse der nicht degenerierten Grenzverteilungen normierter Maxima von i.i.d. Zufallsvariablen überein.

Beweis in McNeil, Frey und Embrechts, 2005.

**Theorem 7 (Fischer-Tippet Theorem)**

Sei  $(X_k)$  eine Folge von i.i.d. ZV. Wenn die Konstanten  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ ,  $a_n > 0$ , und eine nicht degenerierte Verteilung  $H$  existieren, sodass  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1}(M_n - b_n) = H$ , dann ist  $H$  vom selben Typus wie eine der untenstehenden drei Verteilungen:

$$\begin{array}{ll} \text{Fréchet} & \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \exp\{-x^{-\alpha}\} & x > 0 \end{cases} & \alpha > 0 \\ \text{Weibull} & \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^\alpha\} & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} & \alpha > 0 \\ \text{Gumbel} & \Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\} & x \in \mathbb{R} \end{array}$$

Beweis: Resnick 1987, Seite 9-11.

Die Verteilungen  $\Phi_\alpha$ ,  $\Psi_\alpha$  und  $\Lambda$  heißen *standard Extremwertverteilungen*. Verteilungen, die vom selben Typus wie  $\Phi_\alpha$ ,  $\Psi_\alpha$  oder  $\Lambda$  heißen *Extremwertverteilungen*.

**Definition 16** Die ZV  $X$  (oder die dazugehörige Verteilung) gehört zum maximalen Anziehungsgebiet der Extremwertverteilung  $H$  wenn die Konstanten  $a_n > 0$  und  $b_n \in \mathbb{R}$  existieren, sodass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1}(M_n - b_n) = H.$$

Notation:  $X \in MDA(H)$  ( $F \in MDA(H)$ ).

**Theorem 8** (Charakterisierung von MDA)

$F \in MDA(H)$  mit normierenden Konstanten  $a_n > 0$  und  $b_n \in \mathbb{R}$ , dann und nur dann, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\bar{F}(a_n x + b_n) = -\ln H(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Für  $H(x) = 0$  wird  $-\ln H(x)$  durch  $\infty$  ersetzt.

Hinweis zum Beweis: Satz 8 folgt vom Satz 5.

Es gibt auch Verteilungen die zu keinem maximalen Anziehungsgebiet einer Extremwertverteilung gehören!

**Beispiel 19** (Die Poisson Verteilung)

Sei  $X \sim P(\lambda)$ . D.h.  $P(X = k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $\lambda > 0$ . Zeigen Sie, dass es keine Extremwertverteilung  $Z$  gibt für die  $X \in MDA(Z)$ .

**Beispiel 20** (Maxima der Exponentialverteilung)

Sei  $(X_k)$  eine Folge von i.i.d. ZV mit Verteilungsfunktion  $F$ ,  $F(x) = 1 - e^{-x}$  für  $x \geq 0$ . Zeigen Sie, dass  $F \in MDA(\Lambda)$  mit normierenden Konstanten  $a_n = 1$  und  $b_n = \ln n$ .

**Beispiel 21** (Maxima der Cauchy-Verteilung)

Sei  $(X_k)$  eine Folge von i.i.d. ZV mit Verteilungsfunktion  $F$  und Dichtefunktion  $f$ ,  $f(x) = (\pi(1 + x^2))^{-1}$  für  $x \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie, dass  $F \in MDA(\Phi_1)$  mit normierenden Konstanten  $a_n = n/\pi$  und  $b_n = 0$ .

**Definition 17** (Die Verallgemeinerte Extremwertverteilung)

Die Verteilungsfunktion  $H_\gamma$  sei folgendermaßen gegeben:

$$H_\gamma(x) = \begin{cases} \exp\{-(1 + \gamma x)^{-1/\gamma}\} & \text{wenn } \gamma \neq 0 \\ \exp\{-\exp\{-x\}\} & \text{wenn } \gamma = 0 \end{cases}$$

wobei  $1 + \gamma x > 0$ . D.h. der Definitionsbereich von  $H_\gamma$  wird folgendermaßen gegeben:

$$\begin{aligned} x &> -\gamma^{-1} && \text{wenn } \gamma > 0 \\ x &< -\gamma^{-1} && \text{wenn } \gamma < 0 \\ x &\in \mathbb{R} && \text{wenn } \gamma = 0 \end{aligned}$$

$H_\gamma$  heißt verallgemeinerte standard Extremwertverteilung.

### Theorem 9 (Charakterisierung von $MDA(H_\gamma)$ )

- $F \in MDA(H_\gamma)$  mit  $\gamma > 0 \iff F \in MDA(\Phi_\alpha)$  mit  $\alpha = 1/\gamma > 0$ .
- $F \in MDA(H_0) \iff F \in MDA(\Lambda)$ .
- $F \in MDA(H_\gamma)$  mit  $\gamma < 0 \iff F \in MDA(\Psi_\alpha)$  mit  $\alpha = -1/\gamma > 0$ .

### Theorem 10 ( $MDA(\Phi_\alpha)$ , Gnedenko 1943)

$F \in MDA(\Phi_\alpha)$  ( $\alpha > 0$ )  $\iff \bar{F} \in RV_{-\alpha}$  ( $\alpha > 0$ ).

Wenn  $F \in MDA(\Phi_\alpha)$ , dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1} M_n = \Phi_\alpha$  mit  $a_n = F^{\leftarrow}(1 - n^{-1})$ .

**Beispiel 22** Zeigen Sie, dass die untenstehenden Verteilungen dem  $MDA(\Phi_\alpha)$  gehören und bestimmen Sie die normierenden Konstanten.

- Pareto:  $F(x) = 1 - x^{-\alpha}$ ,  $x > 1$ ,  $\alpha > 0$ .
- Cauchy:  $f(x) = (\pi(1 + x^2))^{-1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- Student:  $f(x) = \frac{\Gamma((\alpha+1)/2)}{\sqrt{\alpha\pi}\Gamma(\alpha/2)(1+x^2/\alpha)^{(\alpha+1)/2}}$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- Loggamma:  $f(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} (\ln x)^{\beta-1} x^{-\alpha-1}$ ,  $x > 1$ ,  $\alpha, \beta > 0$ .

**Theorem 11** ( $MDA(\Psi_\alpha)$ , Gnedenko 1943)

$F \in MDA(\Psi_\alpha)$  ( $\alpha > 0$ )  $\iff x_F := \sup\{x \in \mathbb{R}: F(x) < 1\} < \infty$  und  $\bar{F}(x_F - x^{-1}) \in RV_{-\alpha}$  ( $\alpha > 0$ ).

Wenn  $F \in MDA(\Psi_\alpha)$ , dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1}(M_n - x_F) = \Psi_\alpha$  mit  $a_n = x_F - F^{\leftarrow}(1 - n^{-1})$ .

**Beispiel 23** Sei  $X \sim U(0, 1)$ . Es gilt  $X \in MDA(\Psi_1)$  mit  $a_n = 1/n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Theorem 12** ( $MDA(\Lambda)$ )

Sei  $F$  eine Verteilungsfunktion mit rechtem Endpunkt  $x_F \leq \infty$ .  $F \in MDA(\Lambda)$  dann und nur dann wenn es ein  $z < x_F$  existiert, sodass für  $F$  folgende Darstellung gilt:

$$\bar{F}(x) = c(x) \exp\left\{-\int_z^x \frac{g(t)}{a(t)} dt\right\}, \forall x, z < x \leq x_F.$$

Für die Funktionen  $c(x)$  und  $g(x)$  gilt  $\lim_{x \uparrow x_F} c(x) = c > 0$  und  $\lim_{t \uparrow x_F} g(t) = 1$ , und  $a(t)$  ist eine positive absolut stetige Funktion, sodass  $\lim_{t \uparrow x_F} a'(t) = 0$ .