

Beispiel 17 Seien X_1 und X_2 zwei nichtnegative i.i.d. ZV mit Verteilungsfunktion $F, \bar{F} \in RV_{-\alpha}$ für ein $\alpha > 0$.

Annahme: X_1 (X_2) gibt den Verlust eines Portfolios bestehend aus 1 Stück der Aktie A_1 (A_2) an.

Es wird weiters angenommen, dass die Preise von A_1 und A_2 identisch und deren Veränderung i.i.d. sind.

Ein Investor hat 2 Stück der Aktie A_1 gekauft. Die Wahrsch., dass sein Verlust grösser als l ist, wird durch $P(2X_1 > l)$ gegeben. Kann der Investor die Verlustwahrsch. verringern in dem er auf ein diversifiziertes Portfolio bestehend aus einem Stück der Aktie A_1 und einem Stück der Aktie A_2 wechselt?

Beispiel 18 Seien $X, Y \geq 0$ zwei ZV, die die Verluste zweier Geschäftslinien einer Versicherungsgesellschaft darstellen (Brand- bzw. Autoversicherung). Sei F die Verteilungsfunktion von X für die $\bar{F} \in RV_{-\alpha}$, $\alpha > 0$, gilt. Es gelte weiters $E(Y^k) < \infty$, $\forall k > 0$.

Die Versicherungsgesellschaft möchte $\lim_{x \rightarrow \infty} P(X > x | X + Y > x)$ ermitteln, d.h. die Wahrscheinlichkeit eines grossen Verlustes bei der Brandversicherung, berechnen, vorausgesetzt es gibt einen grossen Gesamtverlust der zwei Linien.

Klassische Extremwerttheorie

Seien (X_k) , $k \in \mathbb{N}$, nicht degenerierte i.i.d. ZV mit Verteilungsfunktion F .

Für $n \geq 1$ definiere $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, $M_n := \max\{X_i: 1 \leq i \leq n\}$

Frage: Welche sind die möglichen (nicht degenerierten) Grenzverteilungen von normierten und zentrierten S_n bzw. M_n ?

Zunächst wird die Grenzverteilung von S_n untersucht:

Für welche nicht degenerierten ZV Z gibt es zwei Zahlenfolgen $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, sodass $a_n^{-1}(S_n - b_n) \rightarrow Z$ in Verteilung für $n \rightarrow \infty$.
Notation: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1}(S_n - b_n) = Z$

Definition 11 Eine ZV X heißt stabil, (α -stabil, Lévy-Stabil), wenn für alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+$ und die i.i.d. Kopien X_1 und X_2 von X die Konstanten $a(c_1, c_2) \in \mathbb{R}$ und $b(c_1, c_2) \in \mathbb{R}$ existieren, sodass $c_1 X_1 + c_2 X_2$ und $a(c_1, c_2)X + b(c_1, c_2)$ idente Verteilungsfunktionen haben.

Notation: $c_1 X_1 + c_2 X_2 \stackrel{d}{=} a(c_1, c_2)X + b(c_1, c_2)$

Theorem 1 Die Klasse von stabilen Verteilungen stimmt mit der Klasse der nicht degenerierten Grenzverteilungen passend normierter und zentrierter Summen von i.i.d. ZV überein.

Beweis zB. in Rényi, 1962.

Theorem 2 Die charakteristische Funktion einer stabilen Verteilung X ist folgendermaßen gegeben:

$$\varphi_X(t) = E[\exp\{iXt\}] = \exp\{i\gamma t - c|t|^\alpha(1 + i\beta\text{signum}(t)z(t, \alpha))\}$$

wobei $\gamma \in \mathbb{R}$, $c > 0$, $\alpha \in (0, 2]$, $\beta \in [-1, 1]$ und

$$z(t, \alpha) = \begin{cases} \tan(\frac{\pi\alpha}{2}) & \text{wenn } \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi} \ln |t| & \text{wenn } \alpha = 1 \end{cases} \quad (4)$$

Beweis: Lévy 1954, Gnedenko und Kolmogoroff 1960.

Definition 12 Der Parameter α in (4) heißt Formparameter oder charakteristischer Exponent, die dazugehörige Verteilung heißt α -stabil und ihre Verteilungsfunktion wird mit G_α bezeichnet.

Definition 13 Sei X eine ZV mit Verteilungsfunktion F . Angenommen es existieren die Zahlenfolgen $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, sodass $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1}(S_n - b_n) = G_\alpha$, für eine α -stabile Verteilung G_α , dann heißt es " F gehört dem Anziehungsgebiet von G_α ". Notation: $F \in DA(G_\alpha)$.

Anmerkung: $X \sim G_2 \iff \varphi_X(t) = \exp\{i\gamma t - \frac{1}{2}t^2(2c)\} \iff X \sim N(\gamma, 2c)$

Übung 4 Zeigen Sie, dass $F \in DA(G_2) \iff F \in DA(\phi)$, wobei ϕ die Standard Normalverteilung $N(0, 1)$ ist.

Hinweis: Dazu kann der "Convergence to types"-Satz angewendet werden (siehe die nächste Folie).

Definition 14 Die ZV. Z und \tilde{Z} sind vom selben Typus wenn es $\sigma > 0$ und $\mu \in \mathbb{R}$ existieren, sodass $\tilde{Z} \stackrel{d}{=} (Z - \mu)/\sigma$, d.h. $\tilde{F}(x) = F(\mu + \sigma x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, wobei F und \tilde{F} die Verteilungsfunktionen von Z bzw. \tilde{Z} sind.

Theorem 3 (Convergence to types theorem)

Seien $Z, \tilde{Z}, Y_n, n \geq 1$, ZV, sodass weder Z noch \tilde{Z} fast sicher konstant sind. Seien $a_n, \tilde{a}_n, b_n, \tilde{b}_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, Zahlenfolgen mit $a_n, \tilde{a}_n > 0$.

(i) Wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1}(Y_n - b_n) = Z \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{a}_n^{-1}(Y_n - \tilde{b}_n) = \tilde{Z} \quad (5)$$

dann existieren $A > 0$ und $B \in \mathbb{R}$, sodass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{a}_n}{a_n} = A \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{b}_n - b_n}{a_n} = B \quad (6)$$

und

$$\tilde{Z} \stackrel{d}{=} (Z - B)/A. \quad (7)$$

(ii) Angenommen (6) gilt. Dann impliziert jede der zwei Relationen in (5) die Andere, und (7) gilt auch.

Beweis: Siehe Resnick 1987, Prop. 0.2, Seite 7.

Theorem 4 (Charakterisierung des Anziehungsgebietes)

(i) Sei ϕ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Es gilt:

$$F \in DA(\phi) \iff \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \int_{[-x,x]^c} dF(y)}{\int_{[-x,x]} y^2 dF(y)} = 0,$$

wobei $[-x, x]^C$ das Komplement von $[-x, x]$ in \mathbb{R} ist.

(ii) Für $\alpha \in (0, 2)$ gilt:

$$F \in DA(G_\alpha) \iff F(-x) = \frac{c_1 + o(1)}{x^\alpha} L(x), \bar{F}(x) = \frac{c_2 + o(1)}{x^\alpha} L(x),$$

wobei L eine langsam variierende Funktion ist und $c_1, c_2 \geq 0$, $c_1 + c_2 > 0$.

Bekannt auch als Satz von Lévy, Feller und Chintschin.
Beweis in Rényi, 1962.

Anmerkung: Sei $F \in DA(G_\alpha)$ für $\alpha \in (0, 2)$. Es gilt dann $E(|X|^\delta) < \infty$ für $\delta < \alpha$ und $E(|X|^\delta) = \infty$ für $\delta > \alpha$.

Beweis: Siehe Resnick 1987, oder eine anspruchsvolle Hausübung !