

2. Value at Risk ($VaR_\alpha(L)$)

Definition 5 Sei L eine Verlustfunktion und $\alpha \in (0, 1)$ ein gegebenes Konfidenzniveau.

$VaR_\alpha(L)$ ist die kleinste Zahl l , sodass $P(L > l) \leq 1 - \alpha$ gilt.

$$VaR_\alpha(L) = \inf\{l \in \mathbb{R}: P(L > l) \leq 1 - \alpha\} = \\ \inf\{l \in \mathbb{R}: 1 - F_L(l) \leq 1 - \alpha\} = \inf\{l \in \mathbb{R}: F_L(l) \geq \alpha\}$$

zB. Vorschlag von BIS (Bank of International Settlements):
 $VaR_{0.99}(L)$ über ein Horizont von 10 Tagen soll als Maß für das Marktrisiko eines PF verwendet werden.

Definition 6 Sei $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton steigende Funktion (d.h. $x \leq y \implies F(x) \leq F(y)$). Die Funktion

$$F^\leftarrow: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \inf\{x \in \mathbb{R}: F(x) \geq y\}$$

heißt verallgemeinerte inverse Funktion von F .

Hier gilt $\inf \emptyset = -\infty$.

Falls F streng monoton steigend, dann gilt $F^{-1} = F^\leftarrow$.

Übung 1 Sei $F: [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ mit $F(x) = \begin{cases} 1/2 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases}$

$F^\leftarrow = ?$

Definition 7 Sei $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton steigende Funktion. $q_\alpha(F) := \inf\{x \in \mathbb{R}: F(x) \geq \alpha\}$ heist α -Quantil von F .

Für die Funktion L und seiner Verteilungsfunktion F gilt:

$$VaR_\alpha(L) = q_\alpha(F) = F^{\leftarrow}(\alpha).$$

Beispiel 8 Sei $L \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Es gilt $VaR_\alpha(L) = \mu + \sigma q_\alpha(\Phi) = \mu + \sigma \Phi^{-1}(\alpha)$,

wobei Φ die Verteilungsfunktion einer ZV $X \sim N(0, 1)$ ist.

Übung 2 Portfolio PF besteht aus 5 Stück einer Aktie A. Der heutige Preis von A ist $S_0 = 100$. Die täglichen Log-Rendite sind normal verteilt: $X_1 = \ln \frac{S_1}{S_0}$, $X_2 = \ln \frac{S_2}{S_1}, \dots \sim N(0, 0.01)$. Sei L_1 der 1-Tages PF-Verlust von heute auf morgen.

(a) Berechnen Sie $VaR_{0.99}(L_1)$.

(b) Berechnen Sie $VaR_{0.99}(L_{100})$ und $VaR_{0.99}(L_{100}^\Delta)$, wobei L_{100} der 100-Tage PF-Verlust über einen Zeithorizont von 100 Tagen ausgehend von heute ist. L_{100}^Δ ist die Linearisierung des obigen 100-Tage PF-Verlustes.

Hinweis: Für $Z \sim N(0, 1)$ gilt $F_Z^{-1}(0.99) \approx 2.3$.

3. **Conditional Value at Risk** ($CVaR_\alpha(L)$) (oder *Expected Shortfall* (ES))

Ein Nachteil von VaR: Gibt keine Auskunft darüber, wie groß der Verlust sein könnte, falls $L \geq VaR_\alpha(L)$.

Definition 8 Sei α ein vorgegebenes Konfidenzniveau und L eine kontinuierliche Verlustfunktion mit Verteilungsfunktion F_L .
 $CVaR_\alpha(L) := ES_\alpha(L) = E(L|L \geq VaR_\alpha(L))$.

$$CVaR_\alpha(L) = E(L|L \geq VaR_\alpha(L)) = \frac{E(LI_{[q_\alpha(L), \infty)}(L))}{P(L \geq q_\alpha(L))} = \frac{1}{1-\alpha} E(LI_{[q_\alpha(L), \infty)}) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{q_\alpha(L)}^{+\infty} l dF_L(l)$$

I_A ist die Indikatorfunktion der Menge A : $I_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$

Sei F_L die diskrete Verteilungsfunktion einer Verlustverteilung L und α ein vorgegebenes Konfidenzniveau. Der verallgemeinerte $CVaR$ wird im diskreten Fall folgendermaßen definiert:

$$GCVaR_\alpha(L) := \frac{1}{1-\alpha} \left[E(LI_{[q_\alpha(L), \infty)}) + q_\alpha(L) \left(1 - \alpha - P(L \geq q_\alpha(L)) \right) \right]$$

Lemma 1 Sei α ein vorgegebenes Konfidenzniveau und L eine kontinuierliche Verlustfunktion mit Verteilungsfunktion F_L . Es gilt
 $CVaR_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 VaR_p(L) dp$.

Beispiel 9 (a) Sei $L \sim \text{Exp}(\lambda)$. Bestimmen Sie $\text{CVaR}_\alpha(L)$.

(b) Die Verteilungsfunktion F_L der Verlustfunktion L sei folgendermaßen gegeben: $F_L(x) = 1 - (1 + \gamma x)^{-1/\gamma}$ für $x \geq 0$ und $\gamma \in (0, 1)$. Bestimmen Sie $\text{CVaR}_\alpha(L)$.

Beispiel 10 Sei $L \sim N(0, 1)$. Seien ϕ und Φ die Verteilungsdichte bzw. Verteilungsfunktion von L . Es gilt $\text{CVaR}_\alpha(L) = \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}$.

Sei $L' \sim N(\mu, \sigma^2)$. Zeigen Sie, dass $\text{CVaR}_\alpha(L') = \mu + \sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}$ gilt.

Übung 3 Sei die Verteilungsfunktion von L die Student'schen t -Verteilung mit $\nu > 1$ Freiheitsgraden Die Dichtefunktion von L ist

$$g_\nu(x) = \frac{\Gamma((\nu + 1)/2)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}$$

Zeigen Sie, dass $\text{CVaR}_\alpha(L) = \frac{g_\nu(t_\nu^{-1}(\alpha))}{1-\alpha} \left(\frac{\nu + (t_\nu^{-1}(\alpha))^2}{\nu-1}\right)$, wobei t_ν die Verteilungsfunktion von L ist.

Methoden zur Berechnung von VaR und CVaR

Portfoliowert: $V_m = f(t_m, Z_m)$

Z_m ist der Vektor von Risikofaktoren.

Verlustfunktion: $L_{m+1} = l_{[m]}(X_{m+1})$

X_{m+1} ist der Vektor der Veränderungen der Risikofaktoren: $X_{m+1} = Z_{m+1} - Z_m$.

Beobachtungen (historische Daten): Z_{m-n+1}, \dots, Z_m .

Wie können diese historischen Daten zur Berechnung von $VaR(L_{m+1})$, $CVaR(L_{m+1})$ verwendet werden?

Das empirische VaR bzw. CVaR

Sei x_1, x_2, \dots, x_n eine Stichprobe der unabhängigen identischverteilten ZV X_1, X_2, \dots, X_n mit Verteilungsfunktion F

(Notation: Die ZV X_1, X_2, \dots, X_n sind i.i.d.)

Empirische Verteilungsfunktion: $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I_{[x_k, +\infty)}(x)$

Empirisches Quantil: $q_\alpha(F_n) = \inf\{x \in \mathbb{R}: F_n(x) \geq \alpha\} = F_n^{\leftarrow}(\alpha)$

Annahme: $x_1 > x_2 > \dots > x_n$. Dann gilt: $q_\alpha(F_n) = x_{[n(1-\alpha)]+1}$, wobei $[y] = \sup\{n \in \mathbb{N}: n \leq y\}$ für jedes $y \in \mathbb{R}$.

$\hat{q}_\alpha(F) := q_\alpha(F_n)$ ist der empirische Schätzer des Quantils $q_\alpha(F)$.

Lemma 2 Sei F eine streng monoton steigende Funktion.

Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{q}_\alpha(F) = q_\alpha(F)$, $\forall \alpha \in (0, 1)$, d.h. der Schätzer $\hat{q}_\alpha(F)$ ist konsistent.

Der empirische Schätzer des CVaR ist

$$\widehat{CVaR}_\alpha(F) = \frac{\sum_{k=1}^{[n(1-\alpha)]+1} x_k}{[n(1-\alpha)] + 1}$$