

## Monte Carlo Methoden in Kreditrisiko-Management

$P$  Kreditportfolio bestehend aus  $m$  Krediten;

Verlustfunktion  $L = \sum_{i=1}^n L_i$ ; Die Verluste  $L_i$  sind unabhängig bedingt durch einen Vektor  $Z$  von ökonomischen Einflussfaktoren.

Gesucht:

$$VaR_\alpha(L) = q_\alpha(L), CVaR_\alpha = E(L|L > q_\alpha(L)), CVaR_{i,\alpha} = E(L_i|L > q_\alpha(L)).$$

Bei Anwendung von Monte Carlo (MC) Simulation tritt das Problem der Simulation von seltenen Ereignissen auf ("rare event simulation")!

ZB.  $\alpha = 0,99$ . Nur etwas 1% der standard MC Simulationen führt zu einem Verlust  $L$ , sodass  $L > q_\alpha(L)$ .

Standard MC Schätzer:

$$\widehat{CVaR}_\alpha^{(MC)}(L) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n I_{(q_\alpha, +\infty)}(L_i)} \sum_{i=1}^n L_i I_{(q_\alpha, +\infty)}(L_i)$$

wobei  $L_i$  der Verlustwert in der  $i$ -ten Simulationslauf ist.

$\widehat{CVaR}_\alpha^{(MC)}(L)$  ist sehr instabil, d.h. hat eine sehr hohe Varianz, wenn die Anzahl der Simulationen  $n$  nicht sehr sehr groß ist.

## Grundlagen von “Importance Sampling”

Sei  $X$  eine ZV in einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  mit absolut stetiger Verteilungsfunktion und Dichtefunktion  $f$ .

Gesucht:  $\theta = E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)dx$  für eine bekannte Funktion  $h$ .

Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses  $A$ :  $h(x) = I_A(x)$ .

Berechnung von CVaR:  $h(x) = xI_{x>c}(x)$  mit  $c = VaR(X)$ .

### Algorithmus 1 (Monte Carlo Integration)

(1) Generiere  $X_1, X_2, \dots, X_n$  unabhängig aus der Dichte  $f$ .

(2) Berechne den standard MC Schätzer  $\hat{\theta}_n^{(MC)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i)$ .

Aus dem starken Gesetz der großen Zahlen:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta}_n^{(MC)} = \theta$ .  
Im Falle von *seltenen Ereignissen* ( $h(x) = I_A(x)$ ,  $P(A) \ll 1$ ) ist die Konvergenz sehr langsam.

Sei  $g$  eine Wahrscheinlichkeitsdichte, sodass  $f(x) > 0 \Rightarrow g(x) > 0$ .

Wir definieren das *Likelihood ratio* als:  $r(x) := \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)} & g(x) > 0 \\ 0 & g(x) = 0 \end{cases}$

Es gilt:

$$\theta = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)r(x)g(x)dx = E_g(h(x)r(x)) \quad (8)$$

### **Algorithmus 2** (*Importance Sampling*)

(1) Generiere  $X_1, X_2, \dots, X_n$  unabhängig aus der Dichte  $g$ .

(2) Berechne den IS Schätzer  $\hat{\theta}_n^{(IS)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i)r(X_i)$ .

$g$  heißt "Importance Sampling"-Dichte.

Ziel: Auswahl einer "Importance Sampling"-Dichte, sodass die Varianz des IS-Schätzers wesentlich kleiner als die Varianz des standard MC Schätzers ist.

$$\text{var}_g \left( \hat{\theta}_n^{(IS)} \right) = (1/n)(E_g(h^2(X)r^2(X)) - \theta^2)$$

$$\text{var} \left( \hat{\theta}_n^{(MC)} \right) = (1/n)(E(h^2(X)) - \theta^2)$$

Theoretisch kann die Varianz des IS-Schätzers auf 0 reduziert werden!

Annahme  $h(x) \geq 0, \forall x$ .

Für  $g^*(x) = f(x)h(x)/E(h(x))$  gilt:  $\hat{\theta}_1^{(IS)} = h(X_1)r(X_1) = E(h(X))$ .

Der IS-Schätzer gibt den richtigen Wert nach einer einzigen Simulation!

Sei  $h(x) = I_{\{X \geq c\}}(x)$  wobei  $c \gg E(X)$  (seltenes Ereignis). Es gilt  $E(h^2(X)) = P(X \geq c)$  und aus (8) folgt:

$$E_g(h^2(X)r^2(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h^2(x)r^2(x)g(x)dx = E_g(r^2(X); X \geq c) = \quad (9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h^2(x)r(x)f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)r(x)f(x)dx = E(r(X); X \geq c) \quad (10)$$

Das Ziel ist  $g$  so auszuwählen, dass  $E_g(h^2(X)r^2(X))$  klein wird, oder sodass  $r(x)$  für  $x \geq c$  klein und das Ereignis  $X \geq c$  unter der Dichte  $g$  wahrscheinlicher als unter der Dichte  $f$  ist.

## Exponential tilting: Bestimmung des IS-Dichte für “light tailed” Variablen

Sei  $M_X(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Momentum-generierende Funktion von  $X$ :

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx$$

IS-Dichte:  $g_t(x) = \frac{e^{tx} f(x)}{M_X(t)}$

Likelihood Ratio:  $r_t(x) = \frac{f(x)}{g_t(x)} = M_X(t) e^{-tx}$ .

Sei  $\mu_t = E_{g_t}(X) = E(X \exp\{tX\}) / M_X(t)$ .

Wie kann man ein geeignetes  $t$  für ein bestimmtes IS Problem ermitteln?

Z.B. für die Schätzung der Tail-Wahrscheinlichkeit?

Das Ziel ist  $t$  so zu wählen, dass  $E(r(X); X \geq c) = E(I_{X \geq c} M_X(t) e^{-tX})$  klein wird.

$$e^{-tx} \leq e^{-tc}, \text{ für } x \geq c, t \geq 0 \Rightarrow E(I_{X \geq c} M_X(t) e^{-tX}) \leq M_X(t) e^{-tc}.$$

Wir setzen  $t = \operatorname{argmin}\{M_X(t) e^{-tc} : t \geq 0\}$ .

Daraus folgt  $t = t(c)$  wobei  $t(c)$  die Lösung der Gleichung  $\mu_t = c$  ist.

(Eine eindeutige Lösung existiert für alle relevanten Werte von  $c$  - ohne Beweis).

## Exponential Tilting für die Normalverteilung

Sei  $X \sim N(0, 1)$  mit Dichtefunktion  $\phi(x)$ .

$$g_t(x) = \frac{e^{tx}\phi(x)}{M_X(t)} = \frac{e^{tx}\phi(x)}{e^{t^2/2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-t)^2\right\} \text{ und } \mu_t = \frac{E(X \exp\{tX\})}{M_X(t)} = t$$

D.h. unter der Verteilung  $g_t$  gilt  $X \sim N(t, 1)$

Die Gleichung  $\mu_t = c$  lautet  $t = c$ .

## IS im Falle von Wahrscheinlichkeitsmaßen

Seien  $f$  und  $g$  Wahrscheinlichkeitsdichten. Definiere zwei Wahrscheinlichkeitsmasse  $P$  und  $Q$ :

$$P(A) = \int_{x \in A} f(x) dx \text{ und } Q(A) = \int_{x \in A} g(x) dx$$

Die grundlegende Gleichung der IS (8) lautet dann:

$$\theta = E^P(h(X)) = E^Q(h(X)r(X))$$

Analog: Exponential tilting im Fall von Wahrscheinlichkeitsdichten:

Sei  $X$  eine ZV in  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  sodass  $M_X(t) = E^P(\exp\{tX\}) < \infty, \forall t$ .

Sei  $Q_t(A) := E^P\left(\frac{\exp\{tX\}}{M_X(t)}; A\right)$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß in  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

Der IS-Algorithmus bleibt gleich:

Simuliere unabhängige Realisierungen von  $X_i$  in  $(\Omega, \mathcal{F}, Q_t)$  und setze

$$\hat{\theta}_n^{(IS)} = (1/n) \sum_{i=1}^n X_i r_t(X_i) \text{ wobei } r_t(X) = M_X(t) \exp\{-tX\}.$$

## Anwendung von IS auf Bernoulli Mischung Modelle

(siehe Glasserman und Li (2003))

Sei  $L = \sum_{i=1}^m e_i Y_i$  die Verlustfunktion eines Kreditportfolios.

$Y_i$  sind die Verlustindikatoren mit Default-Wahrscheinlichkeit  $\bar{p}_i$  und  $e_i = (1 - \lambda_i)L_i$  die positiven deterministischen *Exposures* ( $\lambda_i$  sind recovery rates und  $L_i$  sind die Kredithöhen),  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Sei  $Z$  ein Vektor von ökonomischen Einflussfaktoren, sodass  $Y_i|Z$  unabhängig sind und  $Y_i|(Z = z) \sim \text{Bernoulli}(p_i(z))$ .

Ziel: Schätzung von  $\theta = P(L \geq c)$  mit Hilfe des IS-Ansatzes, für ein gegebenes  $c$ ,  $c \gg E(L)$ .

**Vereinfachter Fall:**  $Y_i$  sind unabhängig,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Sei  $\Omega = \{0, 1\}^m$  der Raum der Zustände von  $Y$ .

Das Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  in  $\Omega$ :

$$P(\{y\}) = \prod_{i=1}^m \bar{p}_i^{y_i} (1 - \bar{p}_i)^{1-y_i}, \quad y \in \{0, 1\}^m.$$

Die Momentum-generierende Funktion von  $L$ :  $M_L(t) = \prod_{i=1}^m (e^{te_i \bar{p}_i} + 1 - \bar{p}_i)$ .

Das Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q_t$ :

$$Q_t(\{y\}) = \prod_{i=1}^n \left( \frac{\exp\{te_i y_i\}}{\exp\{te_i\} \bar{p}_i + 1 - \bar{p}_i} \bar{p}_i^{y_i} (1 - \bar{p}_i)^{1-y_i} \right).$$

Seien  $\bar{q}_{t,i}$  neue Default-Wahrscheinlichkeiten:

$$\bar{q}_{t,i} := \exp\{te_i\} \bar{p}_i / (\exp\{te_i\} \bar{p}_i + 1 - \bar{p}_i).$$

Somit gilt:

$$Q_t(\{y\}) = \prod_{i=1}^m \bar{q}_i^{y_i} (1 - \bar{q}_i)^{1-y_i}, \quad y \in \{0, 1\}^m.$$

D.h. nach der exponential tilting sind die Default-Indikatoren unabhängig mit neuen Default-Wahrscheinlichkeiten  $\bar{q}_{t,i}$ .

$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{q}_{t,i} = 1$  und  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \bar{q}_{t,i} = 0 \Rightarrow$   
 $E^{Q_t}(L)$  nimmt alle Werte in  $(0, \sum_{i=1}^m e_i)$  an für  $t \in \mathbb{R}$ .

Für IS-Anwendungen wähle  $t$ , sodass  $\sum_{i=1}^m e_i \bar{q}_{t,i} = c$ .

**Allgemeiner Fall:**  $Y_i$  sind unabhängig bedingt durch  $Z$

1. Schritt: Schätzung der bedingten Überschuss-Wahrscheinlichkeit  $\theta(z) := P(L \geq c | Z = z)$  für eine gegebene Realisierung  $z$  der ökonomischen Faktoren  $Z$ , mit Hilfe des im vereinfachten Fall beschriebenen IS-Ansatzes.



### Algorithmus 3 (IS für die bedingte Verlustverteilung)

- (1) Für ein gegebenes  $z$  berechne die bedingten Default-Wahrscheinlichkeiten  $p_i(z)$  (wie im einfachen Unabhängigkeitsfall) und löse folgende Gleichung:

$$\sum_{i=1}^m \frac{\exp\{te_i\}p_i(z)}{\exp\{te_i\}p_i(z) + 1 - p_i(z)} = c$$

Die Lösung  $t = t(c, z)$  gibt den richtigen tilting-Grad.

- (2) Erzeuge  $n_1$  bedingte Realisierungen des Vektors der Default-Indikatoren  $(Y_1, \dots, Y_m)$ . Die einzelnen Indikatoren  $Y_i$ , werden unabhängig aus  $\text{Bernoulli}(q_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , simuliert, wobei

$$q_i = \frac{\exp\{t(c, z)e_i\}p_i(z)}{\exp\{t(c, z)e_i\}p_i(z) + 1 - p_i(z)}$$

- (3) Sei  $M_L(t, z) := \prod[\exp\{te_i\}p_i(z) + 1 - p_i(z)]$  die bedingte Momentenerzeugende Funktion von  $L$ . Seien  $L^{(1)}, L^{(2)}, \dots, L^{(n_1)}$  die  $n_1$  bedingten Realisierungen von  $L$  für die  $n_1$  simulierten Realisierungen

gen von  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ . Berechne den IS-Schätzer für die Tail-Wahrscheinlichkeit der bedingten Verlustverteilung:

$$\hat{\theta}_{n_1}^{(IS)}(z) = M_L(t(c, z), z) \frac{1}{n_1} \sum_{j=1}^{n_1} I_{L^{(j)} \geq c} \exp\{-t(c, z)L^{(j)}\} L^{(j)}.$$

2. Schritt: Schätzung der unbedingten Überschuss Wahrscheinlichkeit  $\theta = P(L \geq c)$ .

Naive Vorgangsweise: Erzeuge mehrere Realisierungen  $z$  der Einflussfaktoren  $Z$  und berechne  $\hat{\theta}_{n_1}^{(IS)}(z)$  für jede dieser Realisierungen. Der gesuchte Schätzer ist der Durchschnittswert der Schätzer  $\hat{\theta}_{n_1}^{(IS)}(z)$  über alle Realisierungen  $z$ .

Das ist nicht die beste Lösung, siehe Glasserman und Li (2003).

Bessere Herangehensweise: IS für die Einflussfaktoren.

Annahme:  $Z \sim N_p(0, \Sigma)$  (zB. probit-normal Bernoulli Mischung)

Die IS-Dichte  $g$  ist die Dichte von  $N_p(\mu, \Sigma)$  für einen "neuen" Erwartungswertvektor  $\mu \in \mathbb{R}^p$ . Eine gute Wahl von  $\mu$  sollte zu häufigen Realisierungen  $z$  die zu höheren bedingten Default-Wahrscheinlichkeiten  $p_i(z)$  führen.

Likelihood Ratio:

$$r_\mu(Z) = \frac{\exp\{-\frac{1}{2}Z^t \Sigma^{-1} Z\}}{\exp\{-\frac{1}{2}(Z - \mu)^t \Sigma^{-1} (Z - \mu)\}} = \exp\{-\mu' \Sigma^{-1} Z + \frac{1}{2} \mu' \Sigma^{-1} \mu\}$$

**Algorithmus 4** (vollständige IS für Bernoulli Mischung Modelle mit Gauss'schen Faktoren)

- (1) Erzeuge  $z_1, z_2, \dots, z_n \sim N_p(\mu, \Sigma)$  ( $n$  ist die Anzahl der Simulationssrunden)
- (2) Für jedes  $z_i$  berechne  $\hat{\theta}_{n_1}^{(IS)}(z_i)$  wie in Algorithmus 3.
- (3) Berechne den IS-Schätzer für die unbedingte Überschuss-Wahrscheinlichkeit:

$$\hat{\theta}_n^{(IS)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_{\mu}(z_i) \hat{\theta}_{n_1}^{(IS)}(z_i)$$

## Die Auswahl von $\mu$

$\mu$  soll so gewählt werden, dass die Varianz des Schätzers klein ist.

Idee von Glasserman und Li (2003) (Skizze):

$$\hat{\theta}_{n_1}^{(IS)}(z) \approx P(L \geq c | Z = z) \Rightarrow$$

Suche eine gute IS-Dichte für die Funktion  $z \mapsto P(L \geq c | Z = z)$ .

Die optimale IS-Dichte  $g^*$  ist proportional zu

$$P(L \geq c | Z = z) \exp\left\{-\frac{1}{2}z^t \Sigma^{-1} z\right\}.$$

Vorschlag: Wähle eine IS-Dichte mit demselben Modus wie die optimale Dichte  $g^*$ .

Das führt zu folgendem Optimierungsproblem:

$$\mu = \operatorname{argmax}_z \left\{ P(L \geq c | Z = z) \exp\left\{-\frac{1}{2}z^t \Sigma^{-1} z\right\} \right\}.$$

Exakte Lösung ist schwierig weil  $P(L \geq c | Z = z)$  ist i.a. nicht in analytischer Form verfügbar.

Siehe Glasserman und Li (2003) für Lösungsansätze.